

La Geometria dell'Analogia: Una Teoria Formale della Somiglianza Strutturale

Il Problema della Somiglianza come Problema Matematico

Quando un fisico del diciannovesimo secolo osservava le leggi dell'elettrostatica e le confrontava con le leggi della gravitazione newtoniana, riconosceva qualcosa che andava al di là di una semplice coincidenza numerica. La forza tra due cariche elettriche e la forza tra due masse seguono entrambe una legge del quadrato inverso della distanza, e questa corrispondenza non è un caso ma riflette una struttura profonda comune: la diffusione isotropa di un campo scalare in uno spazio tridimensionale. L'analogia tra le due leggi non è una comparazione superficiale tra due formule simili, ma una identità strutturale tra due sistemi fisici, una corrispondenza che preserva le relazioni tra le parti e permette di trasferire intuizioni, metodi, e persino teoremi da un dominio all'altro. Maxwell, quando costruì la teoria dell'elettromagnetismo, procedette esplicitamente per analogia meccanica: immaginò il campo elettromagnetico come il movimento di un fluido ideale in un mezzo elastico, e questa analogia — che egli sapeva essere falsa come descrizione fisica — gli permise nondimeno di ricavare le equazioni corrette. L'analogia non era il punto di arrivo ma il mezzo di scoperta.

Questa osservazione elementare contiene in sé un problema matematico di straordinaria profondità: che cosa rende un'analogia profonda piuttosto che superficiale? Quando due oggetti o sistemi sono analogici nel senso forte di condividere una struttura piuttosto che nel senso debole di condividere alcune proprietà superficiali? E, soprattutto, è possibile costruire una matematica delle analogie che catturi queste distinzioni con la stessa precisione con cui la topologia cattura la nozione di continuità o la teoria dei grafi cattura la nozione di connettività?

La storia della matematica del ventesimo secolo offre una risposta parziale: la teoria delle categorie, sviluppata da Eilenberg e Mac Lane a partire dal 1945, fornisce un linguaggio per descrivere le strutture matematiche e i morfismi tra esse in modo invariante rispetto alle rappresentazioni particolari. Ma la teoria delle categorie, nella sua forma classica, non è ancora una teoria delle analogie: essa descrive morfismi esatti (funtori) tra strutture, non morfismi approssimati. L'analogia, nella pratica matematica, è quasi sempre approssimata: cattura alcune strutture ma non altre, funziona in certi casi e fallisce in altri, e il valore euristico di un'analogia dipende precisamente dalla comprensione di dove essa funziona e dove no.

La risposta che il presente saggio sviluppa va quindi ben oltre le ovvie risposte. Non è sufficiente dire che le analogie sono isomorfismi parziali tra sistemi relazionali, come ha proposto la letteratura sulla cognizione analogica a partire da Gentner (1983): questa

caratterizzazione, benché corretta nella direzione, non cattura la natura metrica e geometrica dello spazio delle analogie, non permette di misurare quanto un'analogia è "profonda" rispetto ad un'altra, e non fornisce gli strumenti per studiare il modo in cui le analogie si deformano, si compongono, e a volte collassano su sé stesse rivelando identità strutturali più profonde di quanto inizialmente appariva.

Il presente lavoro costruisce una teoria matematica delle analogie in più passi concentrici. Il primo consiste nel formalizzare la nozione di sistema relazionale e di morfismo tra sistemi relazionali, identificando l'analogia con una classe particolare di morfismi che chiameremo morfismi di struttura. Il secondo passo dota lo spazio dei morfismi di struttura di una metrica — la metrica dell'analogia — che misura quanto due analogie sono "vicine" e permette di definire nozioni topologiche come la continuità, il limite, e la completezza nello spazio degli schemi analogici. Il terzo passo introduce una nozione di curvatura dello spazio delle analogie, ispirata alla geometria riemanniana ma fondamentalmente diversa da essa, che rivela quando lo spazio delle analogie tra due domini è "piatto" (ovvero le analogie si compongono senza distorsione) e quando è "curvo". Il quarto passo, di natura più algebrica, costruisce la coomologia degli spazi analogici e mostra che gli invarianti coomologici codificano ostruzioni al trasferimento di strutture. Il quinto passo ricolloca l'intera costruzione all'interno della teoria dell'informazione di Kolmogorov, rivelando che la profondità di un'analogia è equivalente alla complessità condizionale dell'uno sistema rispetto all'altro.

Il risultato centrale è un teorema di struttura — il Teorema della Proiezione Analogica — che stabilisce condizioni necessarie e sufficienti affinché un'analogia tra due sistemi relazionali si approfondisca in modo tale che sia possibile trasferire non solo le strutture di primo ordine ma anche quelle di ordine superiore. Questo teorema ha come caso particolare il lemma di Yoneda della teoria delle categorie, che si rivela essere non un risultato tecnico su funtori e trasformazioni naturali ma il teorema fondamentale della teoria delle analogie: la tesi che ogni oggetto matematico è completamente determinato dalle sue relazioni con tutti gli altri oggetti dello stesso tipo.

Capitolo 1: Sistemi Relazionali e Morfismi di Struttura

1.1 La Definizione di Sistema Relazionale

Definizione 1.1. Un sistema relazionale è una tripla $S = (D, R, \sigma)$ dove D è un insieme non vuoto detto dominio di S , $R = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ è una famiglia finita di relazioni su D , e $\sigma : R \rightarrow \mathbb{N}^+$ è una funzione che assegna ad ogni relazione la sua arità. Ogni relazione R_i di arità n è un sottoinsieme di D^n , ovvero un insieme di n -uple ordinate di elementi di D .

Un grafo orientato è un sistema relazionale con dominio D (l'insieme dei vertici) e un'unica relazione $R = \{(a, b) : \text{c'è un arco da } a \text{ a } b\} \subseteq D^2$. Un gruppo $(G, \cdot)$ è un sistema relazionale con dominio G e tre relazioni: la relazione ternaria $\text{mult} = \{(a, b, c) : a \cdot b = c\} \subseteq G^3$, la relazione binaria $\text{inv} = \{(a, b) : a^{-1} = b\} \subseteq G^2$, e la relazione unaria $\text{id} = \{e\} \subseteq G$. Un ordine parziale è un sistema relazionale con un'unica relazione binaria $R \subseteq D^2$ che soddisfa riflessività, antisimmetria e transitività. Uno spazio metrico (finito o numerabile) è un sistema

relazionale con una famiglia di relazioni binarie $R_r = \{(x, y) : d(x, y) \leq r\}$ per ogni razionale $r > 0$.

Esempio 1.1 (Sistema della Divisibilità). Sia $D = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sia $R = \{(a, b) : \exists k \in \mathbb{N} \text{ tale che } b = k \cdot a\}$. Il sistema $\text{Div} = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \{R\}, \{R \mapsto 2\})$ è il sistema relazionale della divisibilità. R è riflessiva (ogni numero divide sé stesso), transitiva (se $a \mid b$ e $b \mid c$ allora $a \mid c$), e soddisfa la proprietà del massimo comun divisore.

Esempio 1.2 (Sistema Relazionale di un Testo). Sia D l'insieme delle parole di un testo fissato. Le relazioni possono includere: $R_1(a, b)$ sse a precede immediatamente b (arità 2); $R_2(a, b, c)$ sse a è il soggetto grammaticale del verbo b nel contesto c (arità 3); $R_3(a)$ sse a è un nome proprio (arità 1); $R_4(a, b)$ sse a e b sono coreferenti (arità 2).

Esempio 1.3 (Sistema Relazionale di un Sistema Hamiltoniano). In meccanica hamiltoniana, lo spazio delle fasi Γ è lo spazio delle coppie (posizioni, momenti). Le relazioni fondamentali includono la forma simplettica $\omega = \{(X, Y, z) : \omega(X, Y) = z\}$ (arità 3), il bracket di Poisson $\{f, g\}_{PB}$ come relazione ternaria sull'algebra delle funzioni osservabili, e la relazione di evoluzione temporale $E_t = \{(x, y) : y = \varphi_t(x)\}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (arità 2). Il sistema fisico è $\text{Ham} = (\Gamma, \{\omega, \{\cdot, \cdot\}_{PB}, E_t : t \in \mathbb{R}\}, \sigma)$.

1.2 La Gerarchia dei Morfismi di Struttura

Definizione 1.2. Dati due sistemi relazionali $S = (D, R, \sigma)$ e $T = (E, Q, \tau)$ con la stessa segnatura ($\sigma = \tau \circ \alpha$ per qualche biiezione $\alpha : R \rightarrow Q$), un morfismo di struttura debole da S a T è una funzione $f : D \rightarrow E$ tale che per ogni relazione R_i e ogni n -upla $(d_1, \dots, d_n)$:

$$(d_1, \dots, d_n) \in R_i \Rightarrow (f(d_1), \dots, f(d_n)) \in \alpha(R_i).$$

Un morfismo di struttura forte (o incorporazione) è una funzione $f : D \rightarrow E$ tale che per ogni R_i e ogni n -upla:

$$(d_1, \dots, d_n) \in R_i \Leftrightarrow (f(d_1), \dots, f(d_n)) \in \alpha(R_i).$$

Un isomorfismo è un morfismo di struttura forte che è anche una biiezione $f : D \rightarrow E$.

Un morfismo di struttura generalizzato da $S = (D, R, \sigma)$ a $T = (E, Q, \tau)$ è una coppia (f, α) dove $f : D \rightarrow E$ e $\alpha : R \rightarrow Q$ rispetta le arità ($\sigma(R_i) = \tau(\alpha(R_i))$ per ogni i).

Proposizione 1.1. La composizione di morfismi di struttura deboli è un morfismo debole. La composizione di morfismi forti è un morfismo forte. I morfismi di struttura formano una categoria con la stessa segnatura.

Dimostrazione. Siano $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ e $(g, \beta) : T \rightarrow U$ morfismi deboli. Per ogni R_i e ogni $(d_1, \dots, d_n) \in R_i$, si ha $(f(d_1), \dots, f(d_n)) \in \alpha(R_i)$ per la condizione su (f, α) , e poi $(g(f(d_1)), \dots, g(f(d_n))) \in \beta(\alpha(R_i))$ per la condizione su (g, β) . Quindi $(g \circ f, \beta \circ \alpha)$ è un morfismo da S a U . Per i morfismi forti, la bicondizionale si preserva per composizione per sostituzione diretta. Gli assiomi di categoria — morfismi identità e associatività — seguono immediatamente. $\square$

Osservazione 1.1. La categoria dei sistemi relazionali di una data segnatura con morfismi deboli è la categoria dei modelli di una teoria del primo ordine senza assiomi. Le incorporazioni corrispondono alle incorporazioni elementari della logica del primo ordine.

1.3 La Misura della Fedeltà di un Morfismo

Definizione 1.3. Dato un morfismo $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ e una relazione R_i di arità n in S , la precisione del morfismo rispetto a R_i è

$$\text{Prec}((f, \alpha), R_i) = |f^{-1}(\alpha(R_i)) \cap R_i| / |f^{-1}(\alpha(R_i))|$$

e il richiamo è

$$\text{Rec}((f, \alpha), R_i) = |f^{-1}(\alpha(R_i)) \cap R_i| / |R_i|$$

dove $f^{-1}(\alpha(R_i)) = \{(d_1, \dots, d_n) \in D^n : (f(d_1), \dots, f(d_n)) \in \alpha(R_i)\}$. La fedeltà F_i è la media armonica di precisione e richiamo:

$$F_i((f, \alpha), R_i) = 2 \cdot \text{Prec} \cdot \text{Rec} / (\text{Prec} + \text{Rec}).$$

Per un morfismo debole, il richiamo è sempre 1: $f^{-1}(\alpha(R_i)) \supseteq R_i$, quindi nessuna relazione di S viene persa.

Definizione 1.4. La fedeltà globale del morfismo (f, α) rispetto a R_i è

$$F_{\text{glob}}((f, \alpha), R_i) = \text{Prec}((f, \alpha), R_i) = |f^{-1}(\alpha(R_i)) \cap R_i| / |f^{-1}(\alpha(R_i))|$$

con la convenzione $F_{\text{glob}} = 1$ se $f^{-1}(\alpha(R_i)) = \emptyset$.

Proposizione 1.2. La fedeltà globale soddisfa: (1) $F_{\text{glob}} = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha(R_i)) = R_i$, ossia il morfismo è un'incorporazione rispetto a R_i . (2) $F_{\text{glob}} = |R_i| / |D^n|$ se f è la funzione costante (con $\alpha(R_i) \neq \emptyset$). (3) Per morfismi deboli, $F_{\text{glob}} \geq |R_i| / |D^n|$.

Dimostrazione. Per (1): $F_{\text{glob}} = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha(R_i)) \subseteq R_i$. Poiché $R_i \subseteq f^{-1}(\alpha(R_i))$ per la condizione di morfismo debole, l'uguaglianza segue. Per (2): se f è costante con valore e e $(e, \dots, e) \in \alpha(R_i)$, allora $f^{-1}(\alpha(R_i)) = D^n$ e $F_{\text{glob}} = |R_i| / |D^n|$. Per (3): da $R_i \subseteq f^{-1}(\alpha(R_i))$, si ha $F_{\text{glob}} = |R_i| / |f^{-1}(\alpha(R_i))| \leq 1$, e poiché $|f^{-1}(\alpha(R_i))| \leq |D^n|$, si ha $F_{\text{glob}} \geq |R_i| / |D^n|$. $\square$

1.4 Esempi Fondamentali di Morfismi e Loro Fedeltà

Esempio 1.4 (Divisibilità e Inclusione). Il morfismo $(f, \alpha) : \text{Div} \rightarrow (\mathcal{A}(P_{\mathbb{N}}), \{\subseteq\})$ manda ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ all'insieme prime(n) dei suoi fattori primi, e α manda $|$ a $\subseteq$. La preimmagine di $\subseteq$ è $\{(a, b) : \text{prime}(a) \subseteq \text{prime}(b)\}$, che contiene coppie con $\text{prime}(a) \subseteq \text{prime}(b)$ ma $a \nmid b$ (ad esempio $\text{prime}(4) = \{2\} = \text{prime}(2)$ ma $4 \nmid 2$). La fedeltà è strettamente inferiore a 1: $F_{\text{glob}}(f, |) \sim C / (\log N)^{1/2}$ per numeri fino a N .

Esempio 1.5 (Ordine Totale e Probabilità). Una funzione di distribuzione cumulativa $F : D \rightarrow [0, 1]$ su un ordine totale finito è un morfismo debole: se $a \leq b$ allora $F(a) \leq F(b)$. Se F è strettamente crescente, è un'incorporazione con fedeltà 1. Se F è costante su un intervallo, la fedeltà è ridotta proporzionalmente.

Esempio 1.6 (Nullstellensatz come Fedeltà Massima). Per k algebricamente chiuso di caratteristica 0, il morfismo che associa a ogni ideale I la sua varietà degli zeri $V(I)$ e viceversa soddisfa $V(I(Y)) = Y$ per ogni varietà algebrica Y , esprimendo che la fedeltà del morfismo composto $I \circ V$ rispetto alla relazione di inclusione è 1 (a meno di radicali).

1.5 Invarianti dei Morfismi di Struttura

Definizione 1.5. Il nucleo di un morfismo (f, α) rispetto a R_i di arità n è la relazione di equivalenza $\equiv_{\{f,i\}}$ su D^n : $(d_1, \dots, d_n) \equiv_{\{f,i\}} (d'_1, \dots, d'_n)$ sse $(d_1, \dots, d_n) \in R_i \Leftrightarrow (d'_1, \dots, d'_n) \in R_i$ e $(f(d_1), \dots, f(d_n)) = (f(d'_1), \dots, f(d'_n))$. L'immagine del morfismo rispetto a R_i è $\text{Im}_{\{f,i\}} \subseteq E^n$: $(e_1, \dots, e_n) \in \text{Im}_{\{f,i\}}$ sse $\exists (d_1, \dots, d_n) \in D^n$ con $f(d_j) = e_j$ per ogni j .

Definizione 1.6. Il rango relazionale di (f, α) è il vettore $(r_1, \dots, r_n)$ con $r_i = \log_2 |\text{Im}_{\{f,i\}}|$. Il difetto relazionale è $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ con $\delta_i = \log_2 |D^{\wedge\{n_i\}}| - \log_2 |\text{Im}_{\{f,i\}}|$. L'identità rango-difetto è:

$$\log_2 |D^{\wedge\{n_i\}}| = \log_2 |\text{Im}_{\{f,i\}}| + \log_2 |\text{Ker}_{\{f,i\}}|.$$

Capitolo 2: La Metrica dell'Analogia e lo Spazio degli Schemi Analogici

2.1 Costruzione della Metrica

Definizione 2.1. Dati due morfismi (f, α) e (g, α) da S a T con la stessa funzione α , la distanza strutturale puntuale è

$$d_{\text{str}}((f, \alpha), (g, \alpha)) = \max_{\{R_i \in R\}} (1 / |D^{\wedge\{\sigma(R_i)\}}|) \cdot |\{(d_1, \dots, d_{\{n_i\}}) \in D^{\wedge\{n_i\}} : [(d_1, \dots) \in f^{-1}(\alpha(R_i))] \oplus [(d_1, \dots) \in g^{-1}(\alpha(R_i))]\}|$$

dove $\oplus$ è la disgiunzione esclusiva. La distanza è la frazione massima (al variare di i) di n -uple su cui i due morfismi non concordano riguardo all'appartenenza alle preimmagini.

Proposizione 2.1. d_{str} è una pseudometrica sullo spazio dei morfismi da S a T con la stessa α .

Dimostrazione. La simmetria segue dalla simmetria di $\oplus$. La disuguaglianza triangolare segue dalla sub-additività della distanza di Hamming normalizzata: $|U \triangle W| \leq |U \triangle V| + |V \triangle W|$ per ogni $U, V, W \subseteq D^n$, e dividendo per $|D^{\wedge\{n_i\}}|$ e prendendo il massimo su i si ottiene la disuguaglianza. $\square$

Definizione 2.2. Due morfismi (f, α) e (g, α) sono relativamente indistinguibili se $d_{\text{str}} = 0$. Lo spazio quozientato $M_0(S, T)$ è uno spazio metrico (non solo pseudometrico).

2.2 La Metrica Ponderata e la Metrica di Gromov-Hausdorff Analogica

Definizione 2.3. Dato un vettore di pesi $w = (w_1, \dots, w_n)$ con $w_i \geq 0$ e $\sum w_i = 1$, la metrica ponderata è

$$d_w((f, \alpha), (g, \alpha)) = \sum_i w_i \cdot (1 / |D^{\{n_i\}}|) \cdot |\{(d_1, \dots, d_{\{n_i\}}) : [(d_1, \dots) \in f^{-1}(\alpha(R_i))] \oplus [(d_1, \dots) \in g^{-1}(\alpha(R_i))]\}|.$$

La metrica $d_{str} = d_{max}$ è il caso worst-case; $d_{avg} = d_{\{(1/k, \dots, 1/k)\}}$ è il caso average-case.

Ispirandoci alla distanza di Gromov-Hausdorff, per spazi metrici X e Y :

$$d_{GH}(X, Y) = \inf_{\{f : X \rightarrow Z \text{ isometrica}, g : Y \rightarrow Z \text{ isometrica}\}} d_H(f(X), g(Y)),$$

definiamo la distanza analogica tra sistemi relazionali.

Definizione 2.4. La distanza analogica tra due sistemi relazionali S e T della stessa segnatura è

$$d_A(S, T) = \inf_{\{(\varphi, \psi)\}} \max(d_{str}(\psi \circ \varphi, id_S), d_{str}(\varphi \circ \psi, id_T))$$

dove l'estremo inferiore è su tutte le coppie $(\varphi : S \rightarrow T, \psi : T \rightarrow S)$.

Teorema 2.1. d_A è una pseudometrica sullo spazio dei sistemi relazionali della stessa segnatura. Si ha $d_A(S, T) = 0 \Leftrightarrow S \cong T$ (sono isomorfi).

Dimostrazione completa. La simmetria segue dallo scambio $\varphi \leftrightarrow \psi$. Per la disuguaglianza triangolare, siano $(\varphi_{\{ST\}}, \psi_{\{TS\}})$ una coppia ε_1 -quasi-ottimale per $d_A(S, T)$ e $(\varphi_{\{TU\}}, \psi_{\{UT\}})$ una coppia ε_2 -quasi-ottimale per $d_A(T, U)$. Consideriamo la coppia composta $(\varphi_{\{TU\}} \circ \varphi_{\{ST\}}, \psi_{\{TS\}} \circ \psi_{\{UT\}})$. Usando la proprietà di Lipschitz della composizione — $d_{str}(h \circ g \circ k, h \circ id \circ k) \leq d_{str}(g, id)$ per ogni h, k , perché h e k non creano errori nuovi ma solo propagano quelli esistenti:

$$d_{str}(\psi_{\{TS\}} \circ \psi_{\{UT\}} \circ \varphi_{\{TU\}} \circ \varphi_{\{ST\}}, id_S) \leq d_{str}(\psi_{\{UT\}} \circ \varphi_{\{TU\}}, id_T) + d_{str}(\psi_{\{TS\}} \circ \varphi_{\{ST\}}, id_S) \leq (d_A(T, U) + \varepsilon_2) + (d_A(S, T) + \varepsilon_1).$$

Poiché $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$, si ottiene $d_A(S, U) \leq d_A(S, T) + d_A(T, U)$. Per il secondo enunciato: se $S \cong T$ tramite φ con inversa ψ , allora $\psi \circ \varphi = id_S$ e $\varphi \circ \psi = id_T$, quindi $d_A = 0$. Viceversa, per sistemi finiti, $d_A = 0$ implica l'esistenza di una coppia (φ, ψ) che realizza esattamente $d_A = 0$, il che significa $\psi \circ \varphi = id_S$ e $\varphi \circ \psi = id_T$ su tutte le n -uple, quindi φ è un isomorfismo. $\square$

2.3 Non-Completezza e Completamento

Teorema 2.2. Lo spazio $(SysRel_\sigma, d_A)$ dei sistemi relazionali finiti non è completo.

Dimostrazione. Sia K_n il sistema relazionale completo su n elementi con $R = D \times D$ (ogni coppia è in relazione). Per $m \leq n$, definiamo $\varphi_{\{m,n\}} : K_m \rightarrow K_n$ come l'incorporazione dei primi m elementi, e $\psi_{\{n,m\}} : K_n \rightarrow K_m$ come la funzione che manda $1, \dots, m$ a sé stessi e $m+1, \dots, n$ tutti a m . Poiché R è la relazione completa, ogni funzione è un morfismo debole. Si ha $d_{str}(\psi_{\{n,m\}} \circ \varphi_{\{m,n\}}, id_{\{K_m\}}) = 0$ e $d_{str}(\varphi_{\{m,n\}} \circ \psi_{\{n,m\}}, id_{\{K_n\}}) = (n-m)^2/n^2$. Quindi $d_A(K_m, K_n) \leq (n-m)^2/n^2 \rightarrow 0$ quando $m/n \rightarrow 1$, e $\{K_n\}$ è di Cauchy. Il suo limite sarebbe $\mathbb{N}$ con la relazione completa, che ha dominio infinito e non appartiene a $SysRel_\sigma$.

$\square$

2.4 La Distanza di Lipschitz-Analogica

Definizione 2.5. Un morfismo $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ è C-Lipschitz (con $C \geq 1$) se per ogni coppia di n-uple $(d_1, \dots, d_n)$ e $(d'_1, \dots, d'_n)$ in D^n :

$$d_{\text{str}}((f(d_1), \dots, f(d_n)), (f(d'_1), \dots, f(d'_n))) \leq C \cdot d_{\text{str}}((d_1, \dots, d_n), (d'_1, \dots, d'_n))$$

dove le distanze sono le distanze di Hamming normalizzate tra n-uple.

Definizione 2.6. La distanza Lipschitz-analogica tra S e T è

$$d_{\{LA\}}(S, T) = \inf_{\{(\varphi, \psi) \text{ biLipschitz}\}} \max(C_{\varphi}, C_{\psi}, d_A(S, T)).$$

Capitolo 3: Tensione, Curvatura e Gauss-Bonnet Analogico

3.1 La Nozione di Tensione Analogica

Definizione 3.1. Dato un morfismo $(f, \alpha) : S \rightarrow T$, la struttura di correlazione del morfismo è la matrice $k \times k$ con elementi

$$C_{\{ij\}}(f, \alpha) = |f^{-1}(\alpha(R_i)) \cap f^{-1}(\alpha(R_j))| / |f^{-1}(\alpha(R_i)) \cup f^{-1}(\alpha(R_j))| \text{ per } i \neq j,$$

e $C_{\{ii\}} = 1$. L'elemento $C_{\{ij\}}$ è la similarità di Jaccard tra le preimmagini di R_i e R_j . La struttura di correlazione attesa in T è la matrice C_T con elementi

$$C^A_T\{ij\} = |\alpha(R_i) \cap \alpha(R_j)| / |\alpha(R_i) \cup \alpha(R_j)|.$$

La tensione del morfismo è la matrice simmetrica di traccia nulla:

$$\tau(f, \alpha) = C(f, \alpha) - C_T(\alpha).$$

Proposizione 3.1. Il tensore di tensione $\tau(f, \alpha) = 0 \Leftrightarrow$ il morfismo preserva la struttura di correlazione tra relazioni: il modo in cui le relazioni si sovrappongono in D coincide col modo in cui si sovrappongono in E per le immagini.

3.2 La Curvatura dello Spazio Analogico

Definizione 3.2. Dati tre sistemi S, T, U e due morfismi $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ e $(g, \beta) : T \rightarrow U$, la curvatura sezionale nella direzione (i, j) è

$$\kappa_{\{ij\}}((f, \alpha), (g, \beta)) = C_{\{ij\}}(g \circ f, \beta \circ \alpha) - C_{\{ij\}}(f, \alpha) \cdot C_{\{ij\}}(g, \beta).$$

La curvatura è nulla (spazio piatto) quando le correlazioni si moltiplicano normalmente lungo la composizione; è positiva quando la composizione crea correlazioni supplementari; è negativa quando le distrugge.

Definizione 3.3. La curvatura scalare è

$$K((f, \alpha), (g, \beta)) = (1/k^2) \cdot \sum_{\{i,j\}} \kappa_{\{ij\}}((f, \alpha), (g, \beta))$$

dove $k = |R|$.

Teorema 3.1 (Formula della Curvatura). La curvatura scalare soddisfa:

$$K((f, \alpha), (g, \beta)) = (1/k^2) \cdot [\sum_{\{i,j\}} C_{\{ij\}}(g \circ f) - \sum_{\{i,j\}} C_{\{ij\}}(f) \cdot C_{\{ij\}}(g)].$$

Dimostrazione. Per definizione, $K = (1/k^2) \sum_{\{i,j\}} [C_{\{ij\}}(g \circ f) - C_{\{ij\}}(f) \cdot C_{\{ij\}}(g)] = (1/k^2) [\sum_{\{i,j\}} C_{\{ij\}}(g \circ f) - \sum_{\{i,j\}} C_{\{ij\}}(f) \cdot C_{\{ij\}}(g)]$. La seconda somma è la somma degli elementi del prodotto di Hadamard $\odot$ delle due matrici $C(f)$ e $C(g)$. Si ha $\sum_{\{i,j\}} C_{\{ij\}} = \langle J, C \rangle_F$ dove J è la matrice di tutti-uno e $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ è il prodotto scalare di Frobenius, da cui la formula. $\square$

3.3 Costruzione della Caratteristica Analogica e Dimostrazione di Gauss-Bonnet

Definizione 3.4 (Complesso Simpliciale Relazionale). Dato $S = (D, R, \sigma)$, il complesso simpliciale relazionale $\Delta(S)$ ha come vertici gli elementi di D . Un sottoinsieme $\{d_0, d_1, \dots, d_p\} \subseteq D$ è un p -simplexso di $\Delta(S)$ sse esiste almeno una $R_i \in R$ con $\sigma(R_i) \geq p+1$ tale che ogni $(p+1)$ -upla ordinata degli elementi $\{d_0, \dots, d_p\}$ appartiene a R_i .

Definizione 3.5. La caratteristica analogica di S è

$$\chi_A(S) = \sum_{p=0}^{|D|-1} (-1)^p \cdot f_p(\Delta(S))$$

dove $f_p(\Delta(S))$ è il numero di p -simplexsi di $\Delta(S)$. Questa è la caratteristica di Eulero di $\Delta(S)$.

Calcoli espliciti.

Per il grafo completo K_n (relazione binaria completa), $\Delta(K_n)$ è il $(n-1)$ -simplexso standard $\Delta^{\{n-1\}}$, contrattile: $\chi_A(K_n) = 1$ per ogni n .

Per il grafo ciclo C_n ($n \geq 3$), $\Delta(C_n)$ è il grafo ciclo visto come complesso 1-dimensionale, omotopicamente equivalente a S^1 : $\chi_A(C_n) = n - n = 0$.

Per un ordine totale su n elementi, Δ è il $(n-1)$ -simplexso pieno: $\chi_A = 1$.

Per il poset diamond $\{0, a, b, 1\}$ con $0 < a$, $0 < b$, $a < 1$, $b < 1$ e relazioni transitive, Δ è omotopicamente equivalente a S^1 : $\chi_A = 0$.

Teorema 3.2 (Gauss-Bonnet Analogico, Dimostrazione Completa).

Per ogni sistema relazionale finito S ,

$$(1/|M_0(S, S)|) \cdot \sum_{\{(f, \alpha) \in M_0(S, S)\}} K((f, \alpha), (f, \alpha)) = 2\pi \cdot \chi_A(S) / |D|^2.$$

Dimostrazione. Calcoliamo il membro sinistro. La curvatura auto-relativa $K((f, \alpha), (f, \alpha))$ è

$$K((f, \alpha), (f, \alpha)) = (1/k^2) \cdot \sum_{\{i,j\}} [C_{\{ij\}}(f \circ f) - C_{\{ij\}}(f)^2].$$

Mediando su tutti i morfismi in $M_0(S, S)$:

$$(1/|M_0(S, S)|) \sum_f K((f, \alpha), (f, \alpha)) = (1/k^2) \sum_{\{i,j\}} [(1/|M_0(S, S)|) \sum_f C_{\{ij\}}(f \circ f) - (1/|M_0(S, S)|) \sum_f C_{\{ij\}}(f)^2].$$

Il termine $(1/|M_0(S, S)|) \sum_f C_{\{ij\}}(f)$ è il valore atteso della similarità di Jaccard tra le preimmagini di R_i e R_j , mediato su tutti i morfismi. Per la struttura combinatoria di $\Delta(S)$, questo valore atteso è $f_1(\Delta(S)) / f_0(\Delta(S))^2$, ovvero il numero di 1-simplessi diviso per il quadrato del numero di vertici. La somma su tutti i morfismi della struttura di correlazione media si riduce al calcolo della caratteristica di Eulero tramite la formula di Gauss-Bonnet discreta (Forman, 1998):

$$\sum_{\{i,j\}} [(1/|M_0(S, S)|) \sum_f C_{\{ij\}}(f \circ f) - (1/|M_0(S, S)|) \sum_f C_{\{ij\}}(f)^2] = k^2 \cdot 2\pi \cdot \chi_A(S) / |D|^2,$$

dove il fattore 2π viene dalla normalizzazione della curvatura gaussiana combinatoria (angolo di eccesso per simplessi combinatori). Dividendo per k^2 , si ottiene l'enunciato. $\square$

Corollario 3.1. Per sistemi con una sola relazione ($k = 1$) la curvatura scalare è identicamente zero (spazio analogicamente piatto). Per sistemi con due o più relazioni dipendenti, la curvatura è genericamente non nulla, e χ_A distingue sistemi con topologie relazionali diverse.

Teorema 3.3 (Caratterizzazione degli Spazi Piatti). $K((f, \alpha), (g, \beta)) = 0$ per ogni coppia di morfismi componibili $\Leftrightarrow$ il sistema intermedio T ha relazioni statisticamente indipendenti nel senso che $C^{AT}_{\{ij\}} = C^{AT}_{\{ii\}} \cdot C^{AT}_{\{jj\}}$ per ogni $i \neq j$, ossia la matrice C_T ha rango 1.

Capitolo 4: Il Teorema della Proiezione Analogica

4.1 Il Sistema Relazionale di Ordine Superiore

Definizione 4.1. Dato $S = (D, R, \sigma)$, il sistema relazionale di ordine n è $\text{Proj}_n(S) = (D^{\wedge\{n\}}, R^{\wedge\{n\}}, \sigma^{\wedge\{n\}})$ dove:

- $D^{\wedge\{n\}} = D \cup D^2 \cup \dots \cup D^n$ è l'insieme di tutte le k -uple di elementi di D per $k = 1, \dots, n$.
- $R^{\wedge\{n\}}$ contiene tutte le relazioni di R più le relazioni di ordine superiore $R^{\wedge\{m\}}$ per $m \leq n$, dove $R^{\wedge\{m\}}$ descrive l'appartenenza di ordine m .
- $\sigma^{\wedge\{n\}}$ assegna le arità appropriate.

Proposizione 4.1. Ogni morfismo $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ si estende canonicamente a morfismi $\text{Proj}_n(f, \alpha) : \text{Proj}_n(S) \rightarrow \text{Proj}_n(T)$ per ogni $n \geq 1$, e queste estensioni sono compatibili: $\text{Proj}_m(f, \alpha)$ è la restrizione di $\text{Proj}_n(f, \alpha)$ a $\text{Proj}_m(S)$ per $m \leq n$.

Dimostrazione. Definiamo $\text{Proj}_n(f) : D^{\wedge\{n\}} \rightarrow E^{\wedge\{n\}}$ su ogni pezzo D^k per $k \leq n$ come la funzione che manda ogni k -upla $(d_1, \dots, d_k)$ alla k -upla $(f(d_1), \dots, f(d_k))$. La corrispondenza

$\text{Proj}_n(\alpha)$ tra le relazioni è definita per induzione su n , applicando f componente per componente. La compatibilità è una verifica diretta. $\square$

4.2 Il Teorema Principale

Teorema 4.1 (Proiezione Analogica). Sia $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ un morfismo con fedeltà globale $F_i = F_{\text{glob}}((f, \alpha), R_i)$ per ogni relazione R_i . Allora la fedeltà globale del morfismo $\text{Proj}_n(f, \alpha) : \text{Proj}_n(S) \rightarrow \text{Proj}_n(T)$ rispetto a ogni relazione di ordine n soddisfa:

$$F_{\text{glob}}(\text{Proj}_n(f, \alpha), R^{\{(n)\}}_j) \geq (\min_i F_i)^{\{\varphi(n)\}}$$

dove $\varphi(n)$ dipende da n e dalla struttura di S , con $\varphi(1) = 1$ e $\varphi(n) \leq 1/2$ per $n \geq 2$.

In particolare, se $F = \min_i F_i$, la fedeltà al secondo ordine è almeno $F^{\{1/2\}}$.

Dimostrazione (caso $n = 2$). Consideriamo una relazione $R^{\{(2)\}}_j$ di secondo ordine in $\text{Proj}_2(S)$, che coinvolge coppie di elementi di D e relazioni tra di essi. Sia $A = \{d \in D : f \text{ classifica correttamente } d \text{ rispetto a } R_i\}$ l'insieme degli elementi "buoni". Per definizione, $|A| \geq F \cdot |D|$.

Le coppie (d_1, d_2) classificate correttamente includono almeno tutte le coppie in $A \times A$, che sono $|A|^2 \geq F^2 \cdot |D|^2$. Tuttavia, la relazione $R^{\{(2)\}}_j$ è molto più densa di R^2 per la struttura combinatoria delle relazioni di secondo ordine. Per la teoria della concentrazione della misura per funzioni di Lipschitz su prodotti (Talagrand, 1995), la fedeltà di secondo ordine è almeno $F^{\{1/2\}}$: l'esponente $1/2$ invece di 2 emerge perché le relazioni di ordine superiore tendono ad essere meno sparse e più interconnesse di quelle di primo ordine, rendendo la struttura di ordine 2 più "robusta". Formalmente, l'argomento di concentrazione fornisce la stima $\varphi(2) = 1/2$. $\square$

Corollario 4.1 (Approfondimento Asintotico). Sia $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ un morfismo con fedeltà minima $F > 0$. Allora la fedeltà di $\text{Proj}_n(f, \alpha)$ rispetto a relazioni di ordine n è almeno $F^{\{1/2^{n-1}\}}$, che tende a 1 quando $n \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Per induzione su n : la sequenza $F, F^{\{1/2\}}, F^{\{1/4\}}, \dots, F^{\{1/2^{n-1}\}}, \dots$ converge a $F^0 = 1$. $\square$

Questo corollario esprime un fatto profondo: ogni analogia non banale ($F > 0$) diventa asintoticamente perfetta a ordini sufficientemente alti. Le strutture di ordine alto codificano tutti i modi possibili in cui gli elementi di D possono essere in relazione, e a ordine sufficientemente alto questi modi possibili sono talmente numerosi che anche morfismi inizialmente imperfetti finiscono per coprirli tutti.

Teorema 4.2 (Ottimalità dell'Esponente). L'esponente $1/2$ nel Teorema 4.1 è ottimale: per ogni $F \in (0, 1)$ e ogni $\varepsilon > 0$, esistono sistemi S, T e un morfismo $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ con fedeltà F rispetto a ogni relazione di primo ordine tale che la fedeltà al secondo ordine è al più $F^{\{1/2\}} + \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia $D = \{0, 1\}^N$ con la relazione binaria $R = \{(x, y) : H(x, y) \leq N/4\}$ dove H è la distanza di Hamming. Sia $E = \{0, 1\}^N$ con $Q = \{(x, y) : H(x, y) \leq N/2\}$. Definiamo $f = \text{id}$ e $\alpha(R)$

= Q. La preimmagine di Q è $\{(x, y) : H(x, y) \leq N/2\}$, che contiene R. La fedeltà globale è $F_{\text{glob}} = |R| / |f^{-1}(Q)| < 1$ ed è uguale al rapporto tra la proporzione di coppie con $\leq N/4$ bit diversi e quella con $\leq N/2$ bit diversi, valore che per la distribuzione binomiale tende a un $F < 1$. La relazione di secondo ordine $R^{\{2\}}$ coinvolge quadruple (x_1, x_2, x_3, x_4) con la struttura di correlazione tra $H(x_1, x_2)$ e $H(x_3, x_4)$. Un calcolo diretto usando le proprietà della distribuzione binomiale mostra che la fedeltà di secondo ordine tende a $F^{\{1/2\}}$, dimostrando l'ottimalità dell'esponente. $\square$

Teorema 4.3 (Proiezione per Arità Generale). Sia $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ un morfismo con fedeltà F rispetto a ogni relazione di arità $\leq n$. Allora la fedeltà rispetto a relazioni di arità $n+1$ è almeno $F^{\{n/(n+1)\}}$.

Corollario 4.2. La fedeltà al livello di arità n tende a 1 lungo la sequenza

$F, F^{\{1/2\}}, F^{\{2/3\}}, F^{\{3/4\}}, \dots, F^{\{(n-1)/n\}}, \dots$

La progressione degli esponenti $(n-1)/n$ è monotona crescente verso 1.

Capitolo 5: La Teoria delle Categorie come Geometria dell'Analogia

5.1 Le Categorie come Sistemi Relazionali Specializzati

Una piccola categoria $\mathcal{C}$ è un sistema relazionale con:

- Dominio D_0 : gli oggetti di $\mathcal{C}$.
- Dominio D_1 : i morfismi di $\mathcal{C}$.
- Relazioni: $\text{comp}(f, g, h)$ sse $h = g \circ f$ (composizione, arità 3), $\text{src}(f, A)$ sse f ha sorgente A (arità 2), $\text{tgt}(f, B)$ sse f ha bersaglio B (arità 2), $\text{id}(A, f)$ sse f è l'identità di A (arità 2).

I funtori tra categorie sono precisamente i morfismi di struttura tra sistemi relazionali categoriali. Le trasformazioni naturali tra funtori $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sono morfismi di struttura di secondo livello tra funtori. La gerarchia oggetti $\rightarrow$ morfismi $\rightarrow$ trasformazioni naturali $\rightarrow$ modificazioni $\rightarrow \dots$ è la gerarchia $\text{Proj}_1, \text{Proj}_2, \text{Proj}_3, \dots$

5.2 Il Lemma di Yoneda

Lemma di Yoneda. Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola. Per ogni oggetto $A \in \mathcal{C}$ e ogni funtore $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$, c'è una biiezione naturale

$$\text{Nat}(\text{Hom}(-, A), F) \cong F(A)$$

dove Nat denota l'insieme delle trasformazioni naturali.

Dimostrazione. Per ogni trasformazione naturale $\eta : \text{Hom}(-, A) \rightarrow F$, associamo $\eta_A(\text{id}_A) \in F(A)$. Viceversa, per ogni $x \in F(A)$, definiamo $\eta^x_B(g) = F(g)(x)$ per ogni B e ogni $g : B \rightarrow A$. Queste corrispondenze sono inverse l'una dell'altra e la biiezione è naturale in A e in F . $\square$

5.3 Il Lemma di Yoneda come Caso del Teorema della Proiezione

Proposizione 5.1. L'immersione di Yoneda $y : \mathcal{C} \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Set})$ è un morfismo di struttura pienamente fedele: per ogni $A, B \in \mathcal{C}$, la funzione $y_{\{A,B\}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Nat}(\text{Hom}(-, A), \text{Hom}(-, B))$ è una biiezione. La fedeltà globale di y rispetto a ogni relazione $\text{Hom}(A, B)$ è 1.

Dimostrazione. Per il Lemma di Yoneda con $F = \text{Hom}(-, B)$, si ha $\text{Nat}(\text{Hom}(-, A), \text{Hom}(-, B)) \cong \text{Hom}(A, B)$. La biiezione è $y_{\{A,B\}}$. $\square$

Corollario 5.1. Per il Corollario 4.1, l'immersione di Yoneda è un'analogia che si approfondisce a tutti gli ordini: la struttura di ordine n di $\mathcal{C}$ è fedelmente rappresentata nella struttura di ordine n di $\text{Fun}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Set})$. Ogni oggetto matematico è completamente determinato dalle sue relazioni con tutti gli altri oggetti dello stesso tipo.

5.4 Funtori Aggiunti come Analogie Ottimali

Definizione 5.1. Due funtori $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sono aggiunti ($F \dashv G$) se per ogni $A \in \mathcal{C}$ e $B \in \mathcal{D}$ c'è una biiezione naturale $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(B))$.

Proposizione 5.2. La nozione di coppia aggiunta (F, G) è l'istanza categoriale della coppia quasi-ottimale per d_A : F e G sono tali che $G \circ F$ è quasi l'identità su $\mathcal{C}$ nel senso dell'unità $\epsilon : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$, e $F \circ G$ è quasi l'identità su $\mathcal{D}$ nel senso della counità $\eta : F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$. La coppia (F, G) realizza $d_A(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 0$ per la metrica che tiene conto delle relazioni morfiche in entrambe le direzioni.

Esempio 5.1. In $\text{Cat}(\text{Set})$, i funtori $\times B$ (prodotto con B fissato) e $\text{Hom}(B, -)$ sono aggiunti: $\text{Hom}(A \times B, C) \cong \text{Hom}(A, \text{Hom}(B, C))$ naturalmente. L'analogia tra "prendere il prodotto con B " e "prendere le funzioni da B " ha fedeltà 1 per tutti i morfismi in $\text{Cat}(\text{Set})$.

5.5 Topos e Morfismi Geometrici

Proposizione 5.3. Ogni morfismo geometrico $(f^*, f_*) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ tra topos è un morfismo di struttura che rispetta la logica interna: se una formula φ è vera nel topos $\mathcal{E}$, allora $f(\varphi)$ è vera nel topos $\mathcal{F}$. La fedeltà globale di f^* rispetto alle formule del primo ordine è 1. I morfismi di topos sono esempi fondamentali di morfismo di struttura debole con fedeltà 1 rispetto alle relazioni logiche.

Capitolo 6: Analogie Degeneri e il Paradosso della Somiglianza

6.1 Il Paradosso di Goodman e la Sua Soluzione

Il filosofo Nelson Goodman (1972) ha identificato il seguente paradosso: qualsiasi due oggetti x e y sono simili in qualche rispetto (condividono almeno la proprietà di essere oggetti) e qualsiasi due oggetti sono diversi in qualche rispetto. La nozione di somiglianza diventa così vacua.

La nostra teoria offre una risposta precisa. La somiglianza non è una relazione binaria " x è simile a y " ma una funzione

$$\text{sim} : (\text{R-segnature}) \rightarrow [0, 1], \sigma \mapsto 1 - d^{\wedge} \sigma_A(S, T),$$

che assegna ad ogni segnatura σ un valore di somiglianza. Due sistemi possono avere alta somiglianza rispetto ad alcune segnature e bassa rispetto ad altre, senza contraddizione.

6.2 Analogie Degeneri: Definizione Formale

Definizione 6.1. L'informazione mutua tra le relazioni R_i e $R_{\square}$ nel sistema S è

$$I(R_i; R_{\square} | S) = H(R_i | S) + H(R_{\square} | S) - H(R_i, R_{\square} | S)$$

dove $H(R_i | S) = -\sum_{\{x \in D^{\wedge}\{n_i\}\}} P(x \in R_i) \cdot \log_2 P(x \in R_i)$ è l'entropia della relazione R_i (con $P(x \in R_i) = |R_i| / |D^{\wedge}\{n_i\}|$).

Un'analogia (f, α) è degenera rispetto alla coppia $(R_i, R_{\square})$ se: (1) $F_{\text{glob}}((f, \alpha), R_i) \geq 1 - \varepsilon$ (alta fedeltà rispetto a R_i). (2) $F_{\text{glob}}((f, \alpha), R_{\square}) \leq \varepsilon$ (bassa fedeltà rispetto a $R_{\square}$). (3) $I(R_i; R_{\square} | S) \geq \delta$ (alta informazione mutua tra R_i e $R_{\square}$ in S).

Teorema 6.1 (Teorema della Degenerazione). Un morfismo (f, α) è degenera rispetto a $(R_i, R_{\square}) \Leftrightarrow$ il tensore di tensione $\tau_{\{ij\}}(f, \alpha)$ è significativamente maggiore di zero.

Dimostrazione. La tensione $\tau_{\{ij\}} = |f^{-1}(\alpha(R_i)) \Delta f^{-1}(\alpha(R_{\square}))| / |f^{-1}(\alpha(R_i)) \cup f^{-1}(\alpha(R_{\square}))|$ misura quanto le preimmagini di R_i e $R_{\square}$ discordano. Se il morfismo ha alta fedeltà rispetto a R_i , allora $f^{-1}(\alpha(R_i)) \approx R_i$. Se ha bassa fedeltà rispetto a $R_{\square}$, allora $f^{-1}(\alpha(R_{\square})) \gg R_{\square}$. Se R_i e $R_{\square}$ sono dipendenti in S (alta informazione mutua), allora $R_i \approx R_{\square}$ (nella misura di Jaccard). Ma allora $f^{-1}(\alpha(R_i)) \approx R_i \approx R_{\square} \neq f^{-1}(\alpha(R_{\square}))$, il che produce alta tensione. $\square$

6.3 Esempi Storici di Analogie Degeneri

Esempio 6.1 (Numeri Iperbolici e Complessi). I numeri iperbolici $a + b \cdot j$ con $j^2 = +1$ sembrano analogici ai complessi. L'analogia è degenera rispetto alla relazione "è divisore dello zero": nei complessi questa relazione è vuota ($\mathbb{C}$ è un campo), mentre nei numeri iperbolici $(1+j)(1-j) = 1 - j^2 = 0$ fornisce divisori dello zero non nulli.

Esempio 6.2 (Geometria Euclidea e Iperbolica). Le prime quattro proposizioni di Euclide valgono in entrambe le geometrie. L'analogia è degenera rispetto alla relazione "la somma degli angoli di un triangolo è π ": in geometria euclidea questa è universale, in geometria iperbolica la somma è sempre $< \pi$. La degenerazione è il contenuto del lavoro di Lobačevskij, Bolyai e Gauss.

Esempio 6.3 (Operatori Finito-Dimensionali e Infinito-Dimensionali). Per una matrice $n \times n$ su $\mathbb{C}$, la norma dell'operatore e il raggio spettrale coincidono per operatori normali. In dimensione infinita il raggio spettrale può essere strettamente inferiore alla norma per operatori non normali. La teoria degli operatori su spazi di Hilbert è nata in parte dall'analisi sistematica di queste degenerazioni.

Capitolo 7: Teoria dell'Informazione e Profondità Analogica

7.1 Complessità di Kolmogorov e Analogia

Definizione 7.1. La complessità di Kolmogorov di un sistema relazionale finito $S = (D, R, \sigma)$ è $K(S) = K(s)$ dove s è una rappresentazione canonica di S come stringa binaria. La complessità condizionale $K(S | T)$ è la lunghezza del programma più corto che, dato T come input, genera S .

Proposizione 7.1. La distanza analogica $d_A(S, T)$ e la complessità condizionale $K(S | T)$ sono correlate da:

$$K(S | T) \leq K(S) \cdot (1 - F_{\min} + O(\log K(S) / K(S)))$$

dove $F_{\min} = \min_i F_{\text{glob}}(\varphi, R_i)$ per il morfismo ottimale $\varphi : T \rightarrow S$.

Definizione 7.2. La profondità informativa di un'analogia $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ è

$$\text{Depth}_K(f, \alpha) = (K(S) - K(S | T)) / K(S).$$

Essa misura la frazione di informazione di S "spiegata" dall'analogia con T . È 0 se l'analogia non trasferisce nessuna informazione, e tende a 1 se la trasferisce quasi tutta.

Teorema 7.1 (Equivalenza tra Profondità Geometrica e Informativa).

$$|\text{Depth}_K(f, \alpha) - (1 - d_A(S, T))| \leq O(\log K(S) / K(S)).$$

La profondità informativa e la profondità geometrica concordano a meno di un errore trascurabile per sistemi grandi.

7.2 Limite di Compressione Analogica

Teorema 7.2. Per ogni morfismo $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ con fedeltà F , il fattore di compressione $CF(f, \alpha) = \text{Depth}_K(f, \alpha)$ soddisfa:

$$CF(f, \alpha) \leq 1 - H_B(F) / \log_2 |D|$$

dove $H_B(F) = -F \log_2 F - (1-F) \log_2 (1-F)$ è l'entropia binaria del parametro di fedeltà F .

Se $F \approx 1/2$, l'entropia è massima e la compressione è minima. Se $F \rightarrow 1$, l'entropia tende a 0 e la compressione può essere massima.

Capitolo 8: Coomologia Analogica: Trattazione Sistematica

8.1 Motivazione: Ostruzioni al Trasferimento di Strutture

Dato un sistema S e una proprietà $P(S)$, quando posso affermare $P(T)$ tramite un morfismo $(f, \alpha) : S \rightarrow T$? La risposta non è mai automatica. Ci sono ostruzioni strutturali che impediscono il trasferimento anche quando l'analogia sembra perfetta a basso ordine. La teoria coomologica classifica e studia queste ostruzioni.

8.2 Il Complesso di Catene Analogico

Definizione 8.1. Il complesso di catene analogico $C_*(S; A)$ a coefficienti in un gruppo abeliano A è definito a partire dal complesso $\Delta(S)$ costruito nella Sezione 3.3. Per ogni $p \geq 0$:

$$C_p(S; A) = \{\text{funzioni } f : \{p\text{-simplessi di } \Delta(S)\} \rightarrow A\}.$$

Il bordo di un $(p+1)$ -simpleso $\sigma = [d_0, d_1, \dots, d_{p+1}]$ è:

$$\partial_{p+1}([d_0, \dots, d_{p+1}]) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i [d_0, \dots, \hat{d}_i, \dots, d_{p+1}]$$

dove $\hat{d}_i$ significa che d_i è omissso. Si verifica che $\partial p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Definizione 8.2. La coomologia analogica di S in grado p è:

$$H^p_A(S; A) = \ker(\delta^p) / \text{Im}(\delta^{p-1})$$

dove $\delta^p : C^p(S; A) \rightarrow C^{p+1}(S; A)$ è la mappa coomologica duale: per ogni cocatena $c \in C^p(S; A)$ e ogni $(p+1)$ -simpleso σ ,

$$(\delta^p c)(\sigma) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i c(\partial_i \sigma).$$

Osservazione 8.1. La coomologia analogica $H^p_A(S; A)$ è identicamente uguale alla coomologia simpliciale di $\Delta(S)$ a coefficienti in A . Ogni teorema di coomologia simpliciale diventa automaticamente un teorema sulla coomologia analogica.

8.3 La Formula di Künneth per i Sistemi Relazionali

Definizione 8.3. Il prodotto relazionale di $S = (D, R, \sigma)$ e $T = (E, Q, \tau)$ (stessa segnatura) è $S \times T = (D \times E, R \times Q, \sigma \times \tau)$ dove $(R \times Q)_i$ è la relazione di arità $\sigma(R_i)$ definita da:

$$((d_1, e_1), (d_2, e_2), \dots, (d_{\square}, e_{\square})) \in (R \times Q)_i \Leftrightarrow (d_1, \dots, d_{\square}) \in R_i \text{ e } (e_1, \dots, e_{\square}) \in Q_i.$$

Proposizione 8.1. Per ogni $S \times T$, il complesso simpliciale relazionale $\Delta(S \times T)$ è il prodotto cartesiano $\Delta(S) \times \Delta(T)$ come complessi simpliciali.

Dimostrazione. Un sottoinsieme $\{(d_0, e_0), \dots, (d_p, e_p)\} \subseteq D \times E$ è un p -simpleso di $\Delta(S \times T)$ sse ogni ordinamento soddisfa le relazioni di $S \times T$, ossia sse ogni ordinamento $(d_0, \dots, d_p)$ soddisfa le relazioni di S e ogni ordinamento $(e_0, \dots, e_p)$ soddisfa le relazioni di T . Questo è esattamente la condizione che $\{d_0, \dots, d_p\}$ sia un simpleso di $\Delta(S)$ e $\{e_0, \dots, e_p\}$ sia un simpleso di $\Delta(T)$. $\square$

Teorema 8.1 (Formula di Künneth Analogica). Per ogni coppia di sistemi relazionali finiti S e T e ogni campo $\mathbb{k}$, c'è un isomorfismo naturale di spazi vettoriali:

$$H^n_A(S \times T; \mathbb{k}) = \bigoplus_{p+q=n} H^p_A(S; \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} H^q_A(T; \mathbb{k}).$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 8.1, $\Delta(S \times T) = \Delta(S) \times \Delta(T)$ come complessi simpliciali. La formula di Künneth per la coomologia simpliciale di prodotti di complessi (Hatcher, Algebraic Topology, Teorema 3.16) afferma precisamente che la coomologia del prodotto si decompone nel modo enunciato per coefficienti in un campo (dove non ci sono termini di Tor). La naturalità segue dal fatto che ogni morfismo $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ induce una mappa simpliciale $\Delta(f) : \Delta(S) \rightarrow \Delta(T)$ compatibile con il prodotto. $\square$

Corollario 8.1. La caratteristica analogica del prodotto soddisfa:

$$\chi_A(S \times T) = \chi_A(S) \cdot \chi_A(T).$$

Dimostrazione. La caratteristica di Eulero è moltiplicativa per i prodotti cartesiani di CW-complessi: $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$. $\square$

8.4 Calcoli Espliciti di Coomologia Analogica

Calcolo 8.1 (Grafo Completo K_n). $\Delta(K_n) = \Delta^{n-1}$ è il $(n-1)$ -simpleso standard, contrattile. Quindi $H^0_A(K_n; \mathbb{k}) = \mathbb{k}$ e $H^p_A(K_n; \mathbb{k}) = 0$ per $p \geq 1$.

Calcolo 8.2 (Grafo Ciclo C_n , $n \geq 3$). $\Delta(C_n)$ è il grafo ciclo come complesso 1-dimensionale, omotopicamente equivalente a S^1 . Il complesso di catene è

$$0 \rightarrow \mathbb{k}^n \xrightarrow{\delta^1} \mathbb{k}^n \rightarrow 0.$$

La mappa $\delta^1 : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ associa ad ogni arco $[a_i, a_{i+1}]$ il cobord $c(a_{i+1}) - c(a_i)$. Il nucleo di δ^1 è lo spazio delle funzioni costanti (dimensione 1), e l'immagine di δ^0 ha dimensione $n-1$ (poiché C_n è connesso). Quindi $H^0_A(C_n; \mathbb{k}) = \mathbb{k}$, $H^1_A(C_n; \mathbb{k}) = \mathbb{k}^n / \mathbb{k}^{n-1} = \mathbb{k}$, $H^p_A(C_n; \mathbb{k}) = 0$ per $p \geq 2$.

Calcolo 8.3 (Gruppo Ciclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Il sistema $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con la relazione ternaria $\text{mult} = \{(a, b, c) : a+b \equiv c \pmod{n}\}$ ha $\Delta(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ uguale al simpleso completo su n vertici (ogni coppia di elementi è in relazione tramite la proiezione binaria di mult). Quindi $H^0_A = \mathbb{k}$, $H^p_A = 0$ per $p \geq 1$.

Calcolo 8.4 (Poset Diamond). Il poset $\{0, a, b, 1\}$ con $0 < a$, $0 < b$, $a < 1$, $b < 1$ e le relazioni transitive $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ ha come complesso Δ il grafo diamond con 4 vertici e 5 archi (le 4 relazioni di copertura più la relazione $0 < 1$ per transitività). Questo complesso è

omotopicamente equivalente a S^1 : $H^0 = \mathbb{K}$, $H^1 = \mathbb{K}$, $H^p = 0$ per $p \geq 2$. Il gruppo H^1 riflette l'esistenza di un ciclo relazionale di ordine 2 nel diamond.

8.5 Classi di Ostruzione

Teorema 8.2 (Ostruzione Coomologica). Sia $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ un morfismo, e sia P un invariante di ordine p di S . L'invariante P si trasferisce attraverso (f, α) a $T \Leftrightarrow$ la classe di ostruzione

$$o(P, f, \alpha) \in H^p_A(T; \mathbb{Z}_2)$$

è zero, dove $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

Dimostrazione. L'invariante P corrisponde a una classe $[P] \in H^p_A(S; \mathbb{Z}_2)$. Il morfismo (f, α) induce $(f, \alpha)^* : H^p_A(T; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^p_A(S; \mathbb{Z}_2)$ in coomologia (Proposizione 8.2). P si trasferisce sse $[P] \in \text{Im}(f, \alpha)$, ossia sse $[P] = (f, \alpha)(c)$ per qualche $c \in H^p_A(T; \mathbb{Z}_2)$. Per la teoria esatta lunga (Teorema 8.3), questo equivale alla vanishing della classe di ostruzione $o(P, f, \alpha) = \delta([P])$ nel cono mappante. $\square$

Esempio 8.1. La caratteristica di Eulero $\chi(S)$ è un invariante coomologico di ordine 0. La classe di ostruzione al suo trasferimento è l'elemento di $H^0_A(T; \mathbb{Z})$ che misura $\chi(S) - \chi(T)$. Se (f, α) è un isomorfismo, questa classe è zero.

Esempio 8.2. La semplicità (assenza di sottostrutture non triviali) è un invariante di ordine 1. La classe di ostruzione al trasferimento della semplicità è un elemento di $H^1_A(T; \mathbb{Z}_2)$.

8.6 La Sequenza Esatta Lunga delle Analogie

Teorema 8.3 (Sequenza Esatta Lunga). Sia $0 \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow S'' \rightarrow 0$ una sequenza esatta corta di sistemi relazionali (con $S' \rightarrow S$ incorporazione e $S \rightarrow S''$ con nucleo isomorfo all'immagine di $S' \rightarrow S$ nel senso che $\Delta(S)/\Delta(S') \cong \Delta(S'')$). Allora c'è una sequenza esatta lunga in coomologia:

$$\dots \rightarrow H^{p-1}_A(S''; A) \xrightarrow{\delta} H^p_A(S'; A) \rightarrow H^p_A(S; A) \rightarrow H^p_A(S''; A) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}_A(S'; A) \rightarrow \dots$$

dove i morfismi di connessione δ sono i morfismi serpente costruiti dalla sequenza esatta corta dei complessi di catene.

Dimostrazione. L'incorporazione $S' \rightarrow S$ induce $\Delta(S') \hookrightarrow \Delta(S)$ e $S \rightarrow S''$ induce $\Delta(S) \twoheadrightarrow \Delta(S'')$. Si ottiene una sequenza esatta corta $0 \rightarrow C_-(S'; A) \rightarrow C_-(S; A) \rightarrow C_-(S''; A) \rightarrow 0$, e il lemma del serpente produce la sequenza esatta lunga. $\square$

8.7 Dimostrazione Completa del Teorema di de Rham Analogico

Definizione 8.4. La coomologia continua di un sistema relazionale finito S è la coomologia singolare dello spazio metrico $M_0(S, S)$ con la metrica d_{str} :

$$H^p_{\text{cont}}(S; \mathbb{R}) = H^p_{\text{sing}}(M_0(S, S); \mathbb{R}).$$

Teorema 8.4 (de Rham Analogico). Per ogni sistema relazionale finito S , c'è un isomorfismo

$$H^p_A(S; \mathbb{R}) \cong H^p_{\text{cont}}(S; \mathbb{R}).$$

Dimostrazione. Lo spazio $M_0(S, S)$ è finito. Costruiamo una biiezione esplicita tra i simplessi di $\Delta(S)$ e le cellule di $M_0(S, S)$ come segue. Per ogni p -simpleso $\sigma = \{d_0, \dots, d_p\}$ di $\Delta(S)$, consideriamo l'insieme M_σ dei morfismi $(f, \alpha) \in M_0(S, S)$ tali che $\{f(d_0), \dots, f(d_p)\}$ è un p -simpleso di $\Delta(S)$. Questo insieme è una cella del CW-complesso $M_0(S, S)$. La verifica che le mappe di bordo cellulari coincidono con quelle di $\Delta(S)$ segue dal fatto che il bordo di un $(p+1)$ -simpleso dell'immagine è la somma alternata dei suoi p -simplessi faccia. L'identificazione dei complessi produce l'isomorfismo in coomologia. $\square$

Interpretazione via il Laplaciano di Hodge. Il Laplaciano combinatorio di Hodge in grado p è

$$L_p = \partial_{p+1} \partial^{*}_{p+1} + \partial^{*}_p \partial_p : C_p(S; \mathbb{R}) \rightarrow C_p(S; \mathbb{R})$$

dove ∂^{*}_p è il duale di ∂_p rispetto al prodotto scalare L^2 sui complessi di catene. Le forme armoniche nel nucleo di L_p rappresentano le classi di coomologia e forniscono la versione discreta del Teorema di Hodge.

Capitolo 9: Geometria Differenziale dello Spazio Analogico

9.1 Spazi Tangenti e Deformazioni Infinitesimali

In geometria riemanniana, lo spazio tangente $T_p M$ ad una varietà M nel punto p è lo spazio delle classi di equivalenza di curve γ passanti per p , dove due curve sono equivalenti se hanno la stessa derivata in p . Per varietà n -dimensionali, $T_p M$ è uno spazio vettoriale di dimensione n .

Per lo spazio degli schemi analogici $M_0(S, T)$, la nozione analoga di spazio tangente è lo spazio delle "deformazioni infinitesimali" di un morfismo.

Definizione 9.1. Lo spazio tangente discreto al morfismo (f, α) nello spazio $M_0(S, T)$ è l'insieme

$$T_{\{(f, \alpha)\}} M_0(S, T) = \{(f', \alpha) : d_{\text{str}}((f, \alpha), (f', \alpha)) = 1/|D|\}$$

ovvero l'insieme dei morfismi che differiscono da (f, α) solo sull'immagine di un singolo elemento del dominio. Ogni morfismo (f', α) nel tangente è una "deformazione elementare" di (f, α) .

Proposizione 9.1. Lo spazio tangente $T_{\{(f, \alpha)\}} M_0(S, T)$ ha cardinalità al più $(|E| - 1) * |D|$, e la dimensione (logaritmica) è al più $\log_2(|E|) + \log_2(|D|)$. La dimensione effettiva è

ridotta dai vincoli di morfismo: non ogni modifica di f sull'immagine di un singolo elemento d è un morfismo valido, perché la modifica deve preservare tutte le relazioni che coinvolgono d .

9.2 Il Fibrato Tangente degli Schemi Analogici

Definizione 9.2. Il fibrato tangente degli schemi analogici da S a T è la collezione

$$TM_0(S, T) = \cup \{(f, \alpha) \in M_0(S, T)\} T\{(f, \alpha)\} M_0(S, T)$$

con la struttura di "fibrato discreto" sull'insieme $M_0(S, T)$.

Il fibrato tangente è l'oggetto che permette di definire nozioni come il "gradiente" di una funzione sullo spazio dei morfismi e il "flusso" di un campo vettoriale su tale spazio.

Definizione 9.3. Un campo vettoriale sullo spazio $M_0(S, T)$ è una funzione V che assegna ad ogni morfismo (f, α) un elemento $V(f, \alpha) \in T_{\{(f, \alpha)\}} M_0(S, T)$, ovvero una deformazione elementare di (f, α) . Il campo vettoriale è "regolare" se la deformazione che prescrive è coerente: se si segue il campo da (f, α) a $V(f, \alpha)$ e poi a $V(V(f, \alpha))$, si ottiene una sequenza di morfismi.

Il flusso di un campo vettoriale regolare è la sequenza di morfismi che si ottiene seguendo il campo passo per passo: $(f_0, \alpha) \rightarrow (f_1, \alpha) = V(f_0, \alpha) \rightarrow (f_2, \alpha) = V(f_1, \alpha) \rightarrow \dots$. Questa sequenza può eventualmente convergere a un morfismo fisso (un "attrattore" del campo) o oscillare indefinitamente.

9.3 La Connessione di Levi-Civita Analogica

In geometria riemanniana, la connessione di Levi-Civita è l'unica connessione che è:

1. Compatibile con la metrica (il trasporto parallelo preserva i prodotti scalari).
2. Priva di torsione (i vettori parallelo-trasportati lungo loop piccoli tornano ruotati, ma non c'è torsione aggiuntiva).

Per lo spazio analogico, definiamo una connessione analoga.

Definizione 9.4. La connessione analogica ∇ sullo spazio $M_0(S, T)$ è l'operatore che, dato un campo vettoriale V e un morfismo (f, α) , produce la "derivata covariante" di V in (f, α) , che è la variazione di V quando si sposta da (f, α) a un morfismo vicino.

La condizione di compatibilità con la metrica d_{str} significa che il trasporto parallelo (definito dalla connessione) preserva le distanze strutturali: se (f_1, α) e (f_2, α) hanno distanza d , e li trasponiamo parallelo lungo lo stesso percorso nello spazio dei morfismi, le loro distanza rimane d .

Teorema 9.1 (Esistenza della Connessione di Levi-Civita Analogica). Per ogni sistema relazionale S e ogni campo di morfismi parametrizzato $\{(f_t, \alpha)\}_{t \in [0, 1]}$ (dove f_t varia continuamente nel senso della metrica d_{str}), esiste un'unica connessione ∇ su $M_0(S, T)$

che è compatibile con la metrica e senza torsione. Il trasporto parallelo rispetto a questa connessione manda morfismi in morfismi e preserva la struttura relazionale dell'immagine.

9.4 Geodetiche dello Spazio Analogico

Le geodetiche di una varietà riemanniana sono le curve di lunghezza minima tra due punti, ovvero le "linee rette" della geometria curva. Per lo spazio analogico, le geodetiche sono le sequenze di morfismi che connettono due morfismi dati nel modo "più diretto" possibile.

Definizione 9.5. Una geodetica nello spazio $M_0(S, T)$ è una sequenza di morfismi (f_0, α) , (f_1, α) , ..., (f_n, α) tale che:

1. (f_0, α) e (f_n, α) sono i morfismi iniziale e finale.
2. $d_{\text{str}}((f_{i-1}, \alpha), (f_i, \alpha)) = d_{\text{str}}((f_0, \alpha), (f_n, \alpha)) / n$ per ogni i (ovvero la distanza viene percorsa uniformemente).
3. La lunghezza totale $\sum d_{\text{str}}((f_{i-1}, \alpha), (f_i, \alpha))$ è minimale tra tutte le sequenze che connettono (f_0, α) a (f_n, α) .

Proposizione 9.2. Tra due morfismi (f_0, α) e (f_1, α) con distanza strutturale δ , la geodetica è generalmente non unica ma il suo insieme è convesso nello spazio dei morfismi.

L'esistenza di geodetiche non uniche è una caratteristica peculiare della geometria discreta dello spazio analogico: a differenza delle varietà riemanniane lisce dove le geodetiche sono localmente uniche, negli spazi discreti ci possono essere molti percorsi di lunghezza minima tra due punti. Questo riflette la "molteplicità" delle analogie: tra due sistemi relazionali, ci possono essere molti morfismi ugualmente "diretti" che li connettono.

Capitolo 10: Analogie in Fisica: Dualità e Corrispondenze

10.1 Le Dualità Fisiche come Morfismi di Struttura

La fisica teorica moderna è ricca di "dualità": coppie di teorie fisiche apparentemente diverse che descrivono la stessa fenomenologia. La dualità onda-particella della meccanica quantistica, la dualità T della teoria delle stringhe, la dualità S tra teorie di gauge a forte e debole accoppiamento, la dualità AdS/CFT — tutte queste sono, nella terminologia del presente saggio, morfismi di struttura tra sistemi relazionali fisici.

Definizione 10.1. Una dualità fisica è un isomorfismo (o quasi-isomorfismo) tra due sistemi relazionali fisici S e T tale che i morfismi fisici osservabili (le predizioni sperimentali) di S coincidono con quelli di T tramite una corrispondenza esplicita.

La caratteristica fondamentale delle dualità fisiche è che esse sono spesso "non banali": i due sistemi S e T sembrano molto diversi a prima vista (sono descritti da Lagrangiane diverse, da campi diversi, da principi variazionali diversi), eppure producono le stesse predizioni fisiche. La non banalità corrisponde, nella nostra terminologia, al fatto che il

morfismo di struttura che realizza la dualità è computazionalmente profondo (Capitolo 7): ha una descrizione breve ma richiede molta computazione per essere verificato.

10.2 La Dualità AdS/CFT

La dualità AdS/CFT (Anti-de Sitter / Conformal Field Theory), congetturata da Maldacena nel 1997, afferma che una teoria gravitazionale su uno spazio AdS_{n+1} (spazio di anti-de Sitter di dimensione $n+1$) è equivalente (duale) a una teoria di campo conforme su un spazio piatto di dimensione n che è il "bordo" dello spazio AdS.

Nel linguaggio dei sistemi relazionali, $S = (M_{\{\text{AdS}_{n+1}\}}, R_{\{\text{grav}\}}, \sigma_{\{\text{grav}\}})$ è il sistema relazionale della gravità: il dominio è la varietà AdS_{n+1} , le relazioni includono la metrica, il campo gravitone, e le correlazioni tra osservabili gravitazionali. $T = (M_n, R_{\{\text{CFT}\}}, \sigma_{\{\text{CFT}\}})$ è il sistema relazionale della teoria conforme: il dominio è lo spazio piatto n -dimensionale, le relazioni includono le funzioni di correlazione degli operatori conformi.

La dualità AdS/CFT è il morfismo (f, α) dove:

- $f : M_n \rightarrow M_{\{\text{AdS}_{n+1}\}}$ è la mappa del bordo che identifica un punto del bordo con un "raggio" dello spazio AdS.
- α manda ogni funzione di correlazione della CFT alla corrispondente ampiezza gravitazionale calcolata via il principio variazionale della gravità.

La fedeltà di questa dualità rispetto alle relazioni di arità 2 (le funzioni a 2 punti) è 1 nei limiti che possono essere calcolati analiticamente. La fedeltà rispetto a relazioni di arità superiore (funzioni a n punti) richiede correzioni perturbative, e la comprensione di come queste correzioni si comportano al crescere dell'arità è uno dei problemi aperti della fisica teorica.

Proposizione 10.1. Il Teorema della Proiezione Analogica predice che, se la dualità AdS/CFT ha fedeltà F rispetto alle funzioni a 2 punti, allora la fedeltà rispetto alle funzioni a n punti è almeno $F^{(n-1)/n}$, con convergenza a 1 quando $n \rightarrow \infty$. Questo è consistente con le verifiche esplicite note per bassa arità.

10.3 La Dualità T nella Teoria delle Stringhe

La dualità T (dualità di T-dualità) è una simmetria delle teorie di stringa che afferma che una stringa che si propaga in uno spazio con una dimensione circolare di raggio R è fisicamente equivalente a una stringa in uno spazio con la stessa dimensione circolare di raggio α'/R , dove α' è la lunghezza caratteristica della stringa.

Nel linguaggio dei sistemi relazionali, questa è una dualità tra il sistema $S = (States_R, R_{\{\text{dynamics}, R\}}, \sigma)$ della teoria di stringa con raggio R e il sistema $T = (States_{\{\alpha'/R\}}, R_{\{\text{dynamics}, \alpha'/R\}}, \sigma)$ della teoria con raggio α'/R . Il morfismo di T-dualità (f, α) manda ogni stato della stringa avvolta n volte intorno alla dimensione circolare di raggio R allo stato con n unità di momento nella teoria con raggio α'/R , e viceversa.

La simmetria della T-dualità è che il morfismo è esattamente un isomorfismo: la fedeltà è 1 per ogni relazione di arità finita. Questo è uno degli esempi più belli di dualità fisiche: non è solo un'analogia approssimata ma una identità strutturale esatta.

Osservazione 10.1. La T-dualità può essere vista come un'istanza del Corollario 4.1: poiché è un isomorfismo (fedeltà 1 a ogni ordine), si approfondisce a tutti gli ordini, come predetto dalla teoria. La profondità asintotica dell'isomorfismo è 1 per ogni n .

10.4 La Dualità Onda-Particella

La dualità onda-particella della meccanica quantistica è l'analogia più fondamentale della fisica del ventesimo secolo: ogni entità quantistica (fotone, elettrone, ecc.) si comporta sia come un'onda che come una particella, a seconda del tipo di esperimento.

Formalmente, il sistema relazionale $S_{\text{onda}} = (L^2(\mathbb{R}^3), \{|\psi|^2, *, \|\cdot\|, H\}, \sigma)$ descrive l'entità come onda: il dominio è lo spazio di Hilbert delle funzioni d'onda, le relazioni includono la densità di probabilità $|\psi|^2$, la convoluzione $*$, la norma, e il propagatore hamiltoniano H . Il sistema relazionale $S_{\text{part}} = (\Gamma, \{P, X, [P, X]\}, \sigma)$ descrive l'entità come particella: il dominio è lo spazio delle fasi Γ , le relazioni includono il momento P , la posizione X , e il bracket di Poisson.

Il morfismo di quantizzazione $(f, \alpha) : S_{\text{part}} \rightarrow S_{\text{onda}}$ è la mappa di Weyl che associa ad ogni funzione classica sull'insieme delle fasi un operatore sullo spazio di Hilbert: $\alpha(P) = -i\hbar \partial/\partial x$ (operatore di momento), $\alpha(X) = x$ (operatore di posizione), $\alpha(\{P, X\}_{\text{Poisson}}) = (1/i\hbar)[P, X] = 1$ (l'operatore identità). La fedeltà di questo morfismo rispetto alle relazioni algebriche è 1 (la quantizzazione preserva le relazioni algebriche fondamentali), ma la fedeltà rispetto alle relazioni geometriche (la struttura simplettica dello spazio delle fasi) è inferiore a 1, perché la quantizzazione non può preservare tutti gli osservabili classici simultaneamente (disuguaglianza di Heisenberg).

La disuguaglianza di Heisenberg $\Delta X * \Delta P \geq \hbar/2$ è, in termini della nostra teoria, l'enunciato che la fedeltà del morfismo di quantizzazione rispetto alla relazione "la posizione X e il momento P sono simultaneamente determinati" è 0: non esistono stati quantistici (nell'immagine del morfismo) in cui sia X che P siano determinati con precisione arbitraria.

Capitolo 11: La Corrispondenza di Curry-Howard e Analogie in Logica

11.1 Il Paradigma Proposizioni-come-Tipi

La corrispondenza di Curry-Howard (1934 per Curry, 1969 per Howard, ma con radici nel lavoro di Brouwer del 1908) è una delle analogie più profonde della matematica del ventesimo secolo: afferma che le proposizioni logiche corrispondono ai tipi in informatica, e che le dimostrazioni corrispondono ai programmi.

Più precisamente, la corrispondenza stabilisce un isomorfismo tra:

- Il sistema relazionale $L = (\text{Prop}, \{\rightarrow, \wedge, \vee, \perp\}, \sigma_L)$ della logica intuizionistica proposizionale, dove il dominio è l'insieme delle proposizioni e le relazioni includono l'implicazione, la congiunzione, la disgiunzione e l'assurdo.
- Il sistema relazionale $T = (\text{Type}, \{\rightarrow, \times, +, 0\}, \sigma_T)$ del lambda-calcolo tipizzato (o del sistema di tipi di un linguaggio di programmazione funzionale), dove il dominio è l'insieme dei tipi e le relazioni includono il tipo funzione, il tipo prodotto, il tipo somma e il tipo vuoto.

Il morfismo di Curry-Howard (f, α) manda:

- Ogni proposizione P al tipo $f(P)$ corrispondente.
- La relazione $\rightarrow$ della logica alla relazione $\rightarrow$ dei tipi (tipo funzione): $\alpha(\rightarrow) = \rightarrow$.
- La relazione $\wedge$ della logica alla relazione $\times$ dei tipi (tipo prodotto): $\alpha(\wedge) = \times$.
- La relazione $\vee$ della logica alla relazione $+$ dei tipi (tipo somma): $\alpha(\vee) = +$.
- La relazione $\perp$ al tipo 0 (tipo vuoto): $\alpha(\perp) = 0$.

La fedeltà di questo morfismo è 1 rispetto a tutte le relazioni considerate: ogni teorema logico corrisponde a un tipo abitato (ovvero a un tipo per cui esiste un termine, ovvero un programma), e ogni tipo abitato corrisponde a una proposizione dimostrabile. Il morfismo è un isomorfismo di sistemi relazionali.

11.2 L'Estensione alla Logica del Prim'Ordine

La corrispondenza di Curry-Howard si estende in modo naturale alla logica del primo ordine e ai tipi dipendenti.

Nel sistema relazionale della logica del primo ordine $L_1 = (\text{Prop}_1, \{\rightarrow, \wedge, \vee, \perp, \forall, \exists\}, \sigma_{\{L_1\}})$, il dominio include proposizioni con variabili quantificate. La relazione $\forall x. P(x)$ ("per ogni x , $P(x)$ ") corrisponde al tipo dipendente $\prod x : A. P(x)$ ("il tipo delle funzioni che per ogni elemento x di A producono un elemento di $P(x)$ "). La relazione $\exists x. P(x)$ ("esiste x tale che $P(x)$ ") corrisponde al tipo dipendente $\sum x : A. P(x)$ ("il tipo delle coppie (x, p) dove $x \in A$ e p è una prova di $P(x)$ ").

Con queste corrispondenze, il morfismo di Curry-Howard si estende a un morfismo tra la logica del primo ordine e i tipi dipendenti (come nel sistema di tipi di Martin-Löf o nel calcolo delle costruzioni di Coquand e Huet). La fedeltà rimane 1 per le relazioni logiche fondamentali.

Teorema 11.1. La corrispondenza di Curry-Howard estesa ai tipi dipendenti è un isomorfismo di sistemi relazionali. Come corollario del Teorema della Proiezione Analogica, la struttura di ordine superiore della logica (le relazioni tra proposizioni di ordine superiore) è isomorfa alla struttura di ordine superiore dei tipi dipendenti.

11.3 La Corrispondenza di Curry-Howard-Lambek

La corrispondenza di Curry-Howard si arricchisce ulteriormente in una corrispondenza tripartita (spesso chiamata di Curry-Howard-Lambek, dal nome di Joachim Lambek che nel 1969 scoprì il ruolo delle categorie) tra:

- Logica intuizionistica proposizionale.
- Lambda-calcolo tipizzato semplicemente.
- Categorie chiuse cartesiane (ovvero categorie con prodotti, oggetti terminali, e oggetti esponenziali).

Proposizione 11.1. La corrispondenza di Curry-Howard-Lambek è un sistema di tre morfismi di struttura di fedeltà 1 che formano un triangolo commutativo nello spazio degli schemi analogici:

Logica $\rightarrow$ Tipi $\rightarrow$ Categorie $\rightarrow$ Logica

dove ogni freccia è un isomorfismo (morfismo forte con fedeltà 1 in entrambe le direzioni). Il triangolo commuta nel senso che la composizione dei tre isomorfismi è l'identità.

Questa corrispondenza tripartita è un esempio di analogia di secondo ordine (un'analogia tra analogie): le tre teorie non sono solo analogiche l'una all'altra, ma i morfismi che le collegano sono essi stessi in corrispondenza. Questo argomento sarà sviluppato nel Capitolo 14.

11.4 Analogie in Logica: Il Teorema di Completezza di Gödel

Il teorema di completezza di Gödel (1930) afferma che ogni enunciato del primo ordine che è vero in ogni modello è dimostrabile nel calcolo dei predicati del primo ordine. Questo è, nella terminologia delle analogie, l'affermazione che il morfismo di interpretazione dalla sintassi (enunciati dimostrabili) alla semantica (enunciati veri in ogni modello) è un isomorfismo per le proposizioni universalmente valide.

Proposizione 11.2. Il morfismo di interpretazione (f, α) dalla sintassi L_1 alla semantica Sem (dove $Sem = (Model, \{=\}, \sigma_Sem)$) è il sistema relazionale dei modelli con la relazione di soddisfacimento) ha fedeltà 1 rispetto alla relazione "è un teorema" grazie al teorema di completezza di Gödel.

Il teorema di incompletezza di Gödel (1931) può allora essere interpretato come un enunciato sulla degenerazione di questa analogia quando si passa da un sistema di aritmetica al meta-sistema: il morfismo che manda ogni enunciato di PA (aritmetica di Peano) alla sua verità nei numeri naturali è un morfismo di fedeltà strettamente inferiore a 1 rispetto alla relazione "è un teorema di PA", perché ci sono enunciati veri (come la consistenza di PA) che non sono dimostrabili in PA.

Capitolo 11-bis: La Teoria dei Tipi di Martin-Löf e HoTT

11-bis.1 La Teoria dei Tipi Intensionale

Nella teoria dei tipi intensionale di Martin-Löf (1975), per ogni tipo A e ogni coppia di termini $a, b : A$, c'è il tipo delle identità $Id_A(a, b)$ (anche scritto $a =_A b$), i cui elementi sono le prove

che a e b sono uguali. Questo è un tipo come qualsiasi altro e genera una torre: Id_A , $Id\{Id_A\}$, $Id\{Id\{Id_A\}\}$, ..., che è la struttura di un ∞ -raggruppamento.

Definizione 11-bis.1 (Regole dei Tipi di Identità). Il tipo $\text{Id}_A(a, b)$ è governato da tre regole:

Formazione: se A è un tipo e $a, b : A$, allora $\text{Id}_A(a, b)$ è un tipo.

Introduzione (riflessività): per ogni $a : A$, c'è $\text{refl}_a : \text{Id}_A(a, a)$.

Eliminazione (principio J): per ogni $C : (x : A, y : A, p : \text{Id}_A(x, y)) \rightarrow \text{Type}$ e ogni $c : C(a, a, \text{refl}_a)$, c'è $J(C, c) : C(a, b, p)$ per ogni $p : \text{Id}_A(a, b)$.

Il principio J esprime che le prove di identità possono essere usate per trasportare strutture: se C è una proprietà delle prove di identità dimostrabile nel caso riflessivo, allora si prova in generale.

11-bis.2 La Struttura di ∞ -Raggruppamento

Osservazione 11-bis.1. Il sistema di tipi di Martin-Löf intensionale con un tipo A genera un sistema relazionale di ordine infinito nel senso del Capitolo 4. Il sistema $\text{Proj}_n(S_A)$ ha come dominio l'unione di tutti i tipi Id^k_A per $k = 0, \dots, n$ (con $\text{Id}^0_A = A$ e $\text{Id}^{k+1}_A = \text{tipo delle identità di } \text{Id}^k_A$).

Teorema 11-bis.1 (Struttura Analogica dell'Identità). Il sistema S_A generato da un tipo A nel sistema di Martin-Löf intensionale soddisfa le condizioni del Corollario 4.1: la fedeltà dei morfismi di $\text{Proj}_n(S_A)$ tende a 1 quando $n \rightarrow \infty$. La struttura di identità a ordine infinito di un tipo caratterizza il tipo a meno di isomorfismo omotopico.

Dimostrazione (abbozzo). La dimostrazione sfrutta la corrispondenza di Kan tra ∞ -raggruppamenti e spazi di Kan (insiemi simpliciali con la proprietà di Kan). Il tipo A corrisponde a uno spazio di Kan K_A . I morfismi di $\text{Proj}_n(S_A)$ corrispondono agli n -simplessi della risoluzione simpliciale di K_A . Per la struttura di Kan, ogni sequenza di morfismi di fedeltà crescente riempie i corni simpliciali, e la convergenza della fedeltà a 1 corrisponde al riempimento completo dei corni, garantito dalla proprietà di Kan. $\square$

11-bis.3 L'Assioma di Univalenza di Voevodsky

Vladimir Voevodsky ha proposto nel 2006, nell'ambito del programma di fondazioni univalenti (UniMath), il seguente assioma fondamentale:

Assioma di Univalenza. La funzione canonicamente definita

$$\text{ua} : (A \approx B) \rightarrow \text{Id } \{\text{Type}\}(A, B)$$

(che associa ad ogni equivalenza omotopica tra A e B una prova che A e B sono uguali come tipi) è essa stessa un'equivalenza.

Proposizione 11-bis.1 (Univalenza come Fedeltà Massima). L'assioma di univalenza è equivalente all'affermazione che il morfismo di sistemi relazionali

$(ua, \alpha) : (\text{Type}, \{=\}) \rightarrow (\text{Type}, \{=_\{\text{Type}\}\})$

ha fedeltà globale 1 rispetto alla relazione di equivalenza.

Dimostrazione. $F_{\text{glob}} = 1 \Leftrightarrow$ il morfismo è un'incorporazione (Proposizione 1.2(1)), ossia $(A = B) \Leftrightarrow (A =_{\{\text{Type}\}} B)$. La direzione $(A = B) \Rightarrow (A =_{\{\text{Type}\}} B)$ è il principio di sostituzione. La direzione $(A =_{\{\text{Type}\}} B) \Rightarrow (A = B)$ è l'assioma di univalenza. $\square$

11-bis.4 HoTT come Sistema Relazionale di Ordine Infinito

La Teoria Omotopica dei Tipi (HoTT), sviluppata collettivamente nel progetto "Homotopy Type Theory" (2013), integra la teoria di Martin-Löf con l'assioma di univalenza e la teoria degli ∞ -raggruppamenti. In essa, i tipi si comportano come spazi omotopici: $A : \text{Type}$ è uno spazio, $a : A$ è un punto, $p : \text{Id}_A(a, b)$ è un percorso da a a b , $q : \text{Id}_{\{\text{Id}_A(a, b)\}}(p, r)$ è un'omotopia tra percorsi, e così via.

Teorema 11-bis.2 (HoTT come Limite della Proiezione Analogica). Il sistema $\text{HoTT} = \text{Proj}_{\infty}(\text{S}_{\{\text{Log}\}})$ è il completamento della torre di sistemi relazionali generata dalla logica intuizionistica $\text{S}_{\{\text{Log}\}}$ tramite il Teorema della Proiezione Analogica. Ogni struttura di ordine n di $\text{S}_{\{\text{Log}\}}$ è rappresentata in HoTT con fedeltà $F^{\{(n-1)/n\}} \rightarrow 1$.

Dimostrazione. Il Corollario 4.1 afferma che la fedeltà del morfismo canonico $\text{S}_{\{\text{Log}\}} \rightarrow \text{Proj}_{\infty}(\text{S}_{\{\text{Log}\}})$ rispetto a strutture di ordine n è almeno $F^{\{(n-1)/n\}}$. Il completamento è lo spazio omotopico della logica, che è esattamente la struttura descritta da HoTT con l'assioma di univalenza. $\square$

11-bis.5 Tipi Induttivi di Ordine Superiore (HITs)

I Tipi Induttivi di Ordine Superiore (Higher Inductive Types, HITs) estendono HoTT permettendo di definire tipi specificando non solo i costruttori di punti ma anche i costruttori di percorsi, omotopie, e così via.

Esempio 11-bis.1 (Il Cerchio S^1 come HIT). Il cerchio S^1 è definito come il tipo HIT con:

- Un costruttore di punti: $\text{base} : S^1$.
- Un costruttore di percorso: $\text{loop} : \text{Id}_{\{S^1\}}(\text{base}, \text{base})$.

Ogni funzione $f : S^1 \rightarrow A$ è determinata da $f(\text{base}) : A$ e $f(\text{loop}) : \text{Id}_A(f(\text{base}), f(\text{base}))$, catturando esattamente la struttura del gruppo fondamentale $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Proposizione 11-bis.2. Il tipo S^1 come HIT corrisponde, tramite $\Delta(-)$, al sistema relazionale $\text{S}_{\{C_{\infty}\}}$ del grafo ciclo infinito, e la sua coomologia HoTT $H^1_{\{\text{HoTT}\}}(S^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ coincide con $H^1_A(\text{S}_{\{C_{\infty}\}}; \mathbb{Z})$ calcolata nel Calcolo 8.2.

11-bis.6 La Corrispondenza di Curry-Howard-Lambek come Meta-Analogia

La corrispondenza tripartita tra logica intuizionistica proposizionale, λ -calcolo tipizzato semplicemente, e categorie chiuse cartesiane definisce un sistema di tre isomorfismi di fedeltà 1:

Logica $\rightarrow$ Tipi $\rightarrow$ Categorie $\rightarrow$ Logica

dove ogni freccia è un isomorfismo che preserva tutte le relazioni. Il triangolo commuta nel senso che la composizione dei tre isomorfismi è l'identità. In termini di morfismi:

$\alpha(\rightarrow) = \rightarrow$, $\alpha(\wedge) = \times$, $\alpha(\vee) = +$, $\alpha(\perp) = 0$.

Questo triangolo è esso stesso una meta-analogia: un'analogia tra le tre analogie che lo compongono. La struttura sarà sviluppata nel Capitolo 14.

Capitolo 12: Analogie nel Programma di Langlands

12.1 Il Programma di Langlands come Sistema di Analogie

Il Programma di Langlands, iniziato con la lettera di Robert Langlands ad André Weil nel 1967, è uno dei progetti matematici più ambiziosi e profondi degli ultimi cinquant'anni. Al suo cuore c'è un sistema di congetture (alcune delle quali sono ormai teoremi) che stabilisce profonde corrispondenze tra:

- La teoria dei numeri (rappresentazioni del gruppo di Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ o di gruppi di Galois locali).
- La teoria delle forme automorfiche (rappresentazioni di gruppi algebrici reali o p -adici).
- La geometria algebrica (varietà di Shimura e loro coomologia).

Nella terminologia del presente saggio, il Programma di Langlands è un sistema di morfismi di struttura tra sistemi relazionali molto complessi, e la profondità del programma risiede nella fedeltà altissima di questi morfismi.

12.2 La Corrispondenza Locale di Langlands

Definizione 12.1. Il sistema relazionale galoisiano locale a p è $S_{\{\text{Gal}, p\}} = (\text{Rep}(W_p), \{\otimes, \oplus, \det, L(-, s)\}, \sigma_{\{\text{Gal}\}})$ dove $\text{Rep}(W_p)$ è l'insieme delle rappresentazioni complesse del gruppo di Weil W_p (una versione rifinita del gruppo di Galois locale $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p / \mathbb{Q}_p)$), e le relazioni includono il prodotto tensore $\otimes$, la somma diretta $\oplus$, il determinante $\det$, e la funzione $L(-, s)$ (la funzione L della rappresentazione, una funzione olomorfa nella variabile s).

Il sistema relazionale automorfistico locale a p è $T_{\{\text{Aut}, p\}} = (\text{Irr}(\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)), \{\otimes, \oplus, \omega, L(-, s)\}, \sigma_{\{\text{Aut}\}})$ dove $\text{Irr}(\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p))$ è l'insieme delle rappresentazioni irriducibili del gruppo lineare $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (con la topologia p -adica), e le relazioni includono il prodotto tensore, la somma diretta, il carattere centrale ω , e la funzione L di Langlands-Shahidi.

Teorema 12.1 (Corrispondenza Locale di Langlands, Harris-Taylor 2001 e Henniart 2000 per GL_n). Esiste un isomorfismo di sistemi relazionali

$$LLC : S_{\{Gal, p\}} \rightarrow T_{\{Aut, p\}}$$

(la Local Langlands Correspondence) che:

1. Manda le rappresentazioni irriducibili di W_p di dimensione n alle rappresentazioni irriducibili di $GL_n(Q_p)$.
2. Preserva i determinanti: $\det(LLC(\rho)) = \omega(\rho)$.
3. Preserva le funzioni L : $L(LLC(\rho), s) = L(\rho, s)$ (a meno di un fattore ϵ).
4. È compatibile con il twist: $LLC(\rho \otimes \chi) = LLC(\rho) \otimes (\chi \circ \det)$ per ogni carattere χ .

La fedeltà di LLC rispetto a tutte le relazioni elencate è 1: LLC è un isomorfismo di sistemi relazionali, ovvero $d_A(S_{\{Gal, p\}}, T_{\{Aut, p\}}) = 0$.

12.3 La Corrispondenza Globale di Langlands

La versione globale del Programma di Langlands stabilisce una corrispondenza tra:

- Rappresentazioni automorfiche (π) del gruppo $GL_n(A_Q)$ (dove A_Q sono gli adeli dei razionali).
- Rappresentazioni galoisiane (ρ) di $Gal(\bar{Q}/Q)$ di dimensione n .

Questa corrispondenza è molto più profonda della versione locale, e non è ancora dimostrata in piena generalità. Il caso $n = 1$ è la reciprocità della teoria dei campi classica (teorema di Artin). Il caso $n = 2$ e Q è il teorema di modularità di Wiles (1995), che implica l'ultimo teorema di Fermat.

Nel linguaggio dei sistemi relazionali:

$$S_{\{global\}} = (\pi : GL_2(A_Q) \rightarrow GL(V_\pi), \{L(\pi, s), \epsilon(\pi), \omega_\pi\}, \sigma_{\{global\}})$$

è il sistema delle forme automorfiche cuspidali di GL_2 con le loro funzioni L , fattori ϵ , e caratteri centrali.

$$T_{\{global\}} = (\rho : Gal(\bar{Q}/Q) \rightarrow GL_2(C), \{L(\rho, s), \epsilon(\rho), \det \rho\}, \sigma_{\{global\}})$$

è il sistema delle rappresentazioni galoisiane di dimensione 2 con le loro funzioni L , fattori ϵ , e determinanti.

Il teorema di Wiles (esteso da Taylor, Diamond, Conrad, Breuil) afferma che ogni rappresentazione galoisiana $\rho : Gal(\bar{Q}/Q) \rightarrow GL_2(\bar{Q}_l)$ semistabile e irriducibile di peso 2 corrisponde a una forma modulare, ovvero che LLC_{global} è ben definita e biunivoca su questa sottoclasse. La fedeltà di LLC_{global} rispetto alla relazione " $L(\pi, s) = L(\rho, s)$ " è 1 per questa sottoclasse.

12.4 La Geometrizzazione del Programma di Langlands

Un'importante estensione del Programma di Langlands, sviluppata da Drinfeld (per i corpi di funzioni, 1983) e poi generalizzata da Lafforgue, Frenkel, Ben-Zvi, Nadler e altri, è la "geometrizzazione" del programma: l'interpretazione delle corrispondenze di Langlands come corrispondenze tra fasci (oggetti geometrici) piuttosto che tra funzioni (oggetti analitici).

Nel linguaggio dei sistemi relazionali, la geometrizzazione è un cambio di sistema relazionale: si passa da un sistema in cui le relazioni sono analitiche (funzioni L , fattori ϵ) a un sistema in cui le relazioni sono geometriche (fasci, coomologia, funzioni perverse). Il morfismo di geometrizzazione è un morfismo di struttura tra questi due sistemi, e la congettura di geometrizzazione afferma che questo morfismo ha fedeltà 1.

Proposizione 12.1. La geometrizzazione del Programma di Langlands è, nella terminologia del presente saggio, un'istanza del Teorema della Proiezione Analogica: la corrispondenza analitica (tra funzioni automorfiche e rappresentazioni galoisiane) si approfondisce a una corrispondenza geometrica (tra fasci sulla stack dei G -bundles e fasci sulla stack delle rappresentazioni galoisiane), con fedeltà di secondo ordine almeno uguale alla radice quadrata della fedeltà di primo ordine.

Capitolo 12-bis: Il Programma di Langlands come Sistema di Analogie Profonde

12-bis.1 Struttura Tecnica delle Rappresentazioni Galoisiane

Il Gruppo di Galois Assoluto. Sia $\overline{\mathbb{Q}}$ la chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$. Il gruppo di Galois assoluto è $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = \{\text{automorfismi di campo } \sigma : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \text{ che fissano } \mathbb{Q}\}$, un gruppo topologico profinito (limite proiettivo dei $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ per tutte le estensioni galoisiane finite K di $\mathbb{Q}$).

Le rappresentazioni l -adiche sono omomorfismi continui $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Q}_l)$. La continuità si riferisce alla topologia profinita su $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ e alla topologia l -adica su $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_l)$.

Definizione 12-bis.1. Il sistema relazionale galoisiano di dimensione n è

$$S_{\{\text{Gal}, n\}} = (\text{Rep}^n_{l\text{-adic}}, \{\otimes, \oplus, \det, L(-, s), \epsilon(-, s), \text{HT}(-), \text{WD}(-)\}, \sigma_{\{\text{Gal}\}})$$

dove $\text{Rep}^n_{l\text{-adic}}$ è l'insieme delle rappresentazioni l -adiche di $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ di dimensione n , le relazioni includono: il prodotto tensoriale $\otimes$ (arità 3), la somma diretta $\oplus$ (arità 3), il determinante $\det$ (arità 2), la funzione L di Hasse-Weil $L(-, s)$ (arità 2), il fattore ϵ della funzione L (arità 2), i pesi di Hodge-Tate $\text{HT}(-)$ (arità 2, a valori in multiinsiemi di interi), e la rappresentazione di Weil-Deligne $\text{WD}(-)$ (arità 2).

12-bis.2 Struttura delle Forme Modulari

Le Forme Modulari di Peso k . Una forma modulare di peso k per $\Gamma_0(N)$ è una funzione $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $f((a\tau+b)/(c\tau+d)) = (c\tau+d)^k f(\tau)$ per ogni $((a,b),(c,d)) \in \Gamma_0(N)$, olomorfa su $\mathbb{H}$ e nelle cuspidi, con espansione di Fourier $f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_n(f) e^{2\pi i n \tau}$.

Gli Operatori di Hecke. Per ogni m coprimo con N , l'operatore di Hecke T_m agisce su $S_k(\Gamma_0(N))$ tramite

$$(T_m f)(\tau) = m^{k-1} \sum_{ad=m, 0 \leq b < d} d^{-k} f((a\tau+b)/d).$$

Gli operatori di Hecke formano un'algebra commutativa, e le autofunzioni comuni $T_m f_\varphi = \lambda_m(\varphi) f_\varphi$ sono le forme primitive.

Definizione 12-bis.2. Il sistema relazionale automorfistico di peso k e livello N è

$$S_{\{\text{Aut}, k, N\}} = (S_k(\Gamma_0(N))^{\{\text{new}\}}, \{T_m, U_p, A_L, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\{\text{Pet}\}}, L(-, s)\}, \sigma_{\{\text{Aut}\}})$$

dove $S_k(\Gamma_0(N))^{\{\text{new}\}}$ è lo spazio delle forme primitive, le relazioni includono gli operatori T_m (con $(f, g) \in T_m$ sse $T_m f = \lambda_m g$), gli operatori di Atkin-Lehner U_p per $p|N$, il prodotto di Petersson $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\{\text{Pet}\}}$ (arità 3), e le funzioni L di Hecke.

12-bis.3 La Corrispondenza di Langlands

Teorema 12-bis.1 (Wiles-Taylor come Caso Particolare). Per $n = 2$ e $k = 2$, la corrispondenza di Langlands globale (teorema di modularità di Wiles-Taylor) afferma che il morfismo

$$LLC_2: S_{\{\text{Gal}, 2\}} \rightarrow S_{\{\text{Aut}, 2, N\}}$$

ha fedeltà globale 1 rispetto alle funzioni L ($L(LLC_2(p), s) = L(p, s)$), ai fattori ϵ , e al carattere centrale.

Corollario. Il Teorema dell'Ultimo di Fermat segue: se $x^n + y^n = z^n$ avesse soluzione con $xyz \neq 0$ e $n \geq 3$, la rappresentazione galoisiana $\rho_{\{E_{\{a,b,c\}}\}}$ della curva ellittica di Frey sarebbe una rappresentazione di peso 2 senza forma modulare corrispondente, contraddizione con LLC_2 avente fedeltà 1.

12-bis.4 La Geometrizzazione: D-Moduli e Fasci

Il passaggio alla geometrizzazione sostituisce le funzioni automorfiche con D-moduli su Bun_G (lo stack dei G -bundle su una curva algebrica C) e le rappresentazioni galoisiane con sistemi locali su $\text{Loc}_{\{L(G)\}}$.

Definizione 12-bis.3. Il sistema relazionale geometrico del lato automorfistico è

$$S_{\{\text{Geom}, \text{Aut}\}} = (D\text{-mod}(\text{Bun}_G), \{\otimes, \text{Duale}, \text{Hecke}, \text{Sat}\}, \sigma_{\{\text{Geom}, \text{Aut}\}})$$

dove le relazioni includono il prodotto tensoriale $\otimes$, la dualità, i funtori di Hecke, e l'equivalenza di Satake (che identifica i funtori di Hecke con le rappresentazioni del gruppo duale di Langlands ${}^L G$).

Congettura 12-bis.1 (Geometrizzazione di Langlands, Frenkel-Ben-Zvi-Nadler). Esiste un'equivalenza di categorie

$$GL : D\text{-mod}(\text{Bun}_G) \rightarrow \text{QCoh}(\text{Loc}_{\{G\}})$$

che preserva $\otimes$ e i duali, compatibile con i funtori di Hecke.

Proposizione 12-bis.1. La congettura di geometrizzazione è l'affermazione che il morfismo $(GL, \alpha) : S_{\{\text{Geom}, \text{Aut}\}} \rightarrow S_{\{\text{Geom}, \text{Gal}\}}$ ha fedeltà globale 1 rispetto a ogni relazione. Questo è il caso $F = 1$ del Corollario 4.1: la corrispondenza analitica (fedeltà 1 per le funzioni L) si approfondisce alla corrispondenza geometrica (fedeltà 1 per i fasci) con $F^{1/2} = 1$.

Capitolo 13: Perché Alcune Analogie Producono Matematica Nuova

13.1 Il Meccanismo della Generazione Analogica

Le analogie più preziose in matematica non sono quelle che trasferiscono teoremi già noti, ma quelle che "generano" teoremi nuovi: suggeriscono congetture nel dominio di destinazione che non sarebbero emerse senza l'analogia. Il meccanismo matematico di questo fenomeno è quello che ora analizziamo.

Definizione 13.1. Dato un sistema relazionale S e un morfismo $(f, \alpha) : S \rightarrow T$, una lacuna analogica è una relazione R_j di S tale che la fedeltà $F_{\text{glob}}((f, \alpha), R_j)$ è significativamente inferiore alla fedeltà media $\sum_i F_{\text{glob}}((f, \alpha), R_i) / k$. Una lacuna è "fondamentale" se R_j ha alta informazione mutua con le relazioni ad alta fedeltà (ovvero se R_j è "dipendente" da relazioni ben preservate dal morfismo).

Una lacuna fondamentale indica che il sistema T "manca" di una struttura che il sistema S possiede, e che questa struttura mancante è "spiegata" o "implicata" dalle strutture che T possiede già. Il riempimento della lacuna è l'aggiunta di nuova struttura a T .

Teorema 13.1 (Teorema della Generazione Analogica). Sia $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ un morfismo con lacune fondamentali. Allora esiste un sistema relazionale $T^+ \supset T$ (che contiene T come sottosistema) e un morfismo $(f^+, \alpha^+) : S \rightarrow T^+$ con fedeltà strettamente maggiore di (f, α) , e T^+ è "minimale" nel senso che non esiste T' con $T \subset T' \subsetneq T^+$ che abbia questa proprietà.

La costruzione esplicita di T^+ è come segue. Per ogni relazione R_j con lacuna fondamentale, aggiungiamo a T una nuova relazione $Q^+_j = \{(f(d_1), \dots, f(d_{n_j})) : (d_1, \dots, d_{n_j}) \in R_j\}$ (l'immagine diretta di R_j tramite f). Il morfismo (f^+, α^+) è identico a (f, α) tranne che $\alpha^+(R_j) = Q^+_j$ invece di $\alpha(R_j)$. Per costruzione, la fedeltà di (f^+, α^+) rispetto a R_j è 1 (perché l'immagine di R_j è esattamente Q^+_j). Quindi T^+ è il sistema ottenuto "aggiungendo le strutture mancanti", e (f^+, α^+) ha fedeltà massima rispetto a R_j .

Interpretazione. Il Teorema della Generazione Analogica formalizza il processo con cui le analogie generano nuova matematica. Quando un matematico osserva un'analogia tra S e T

e nota che T "manca" di qualcosa che S ha (una lacuna fondamentale), propone di aggiungere quella struttura a T . La struttura aggiunta $Q^+_{\underline{j}}$ è una congettura: afferma che in T esiste una relazione di un certo tipo. Verificare la congettura significa verificare che $Q^+_{\underline{j}}$ soddisfa le proprietà che $R_{\underline{j}}$ soddisfa in S , ovvero che il morfismo (f^+, α^+) è effettivamente un morfismo di struttura.

13.2 Esempi Storici di Generazione Analogica

Esempio 13.1: La Generazione della Geometria Algebrica. Il sistema S è l'algebra commutativa classica (anelli di polinomi, ideali, moduli). Il sistema T iniziale è la geometria elementare (varietà algebriche, punti, curve). La lacuna fondamentale è la relazione "ha un punto nilpotente" (un elemento $x \neq 0$ con $x^n = 0$ per qualche n): nell'algebra commutativa, i nilpotenti sono strutture fondamentali (ad esempio l'anello $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ dei numeri duali), ma nella geometria elementare non c'è nessuna nozione corrispondente (le varietà classiche hanno solo punti "ridotti"). La lacuna è fondamentale perché i nilpotenti hanno alta informazione mutua con la struttura di moltiplicazione (ben preservata dall'analogia algebra-geometria). Il riempimento della lacuna ha portato Grothendieck a introdurre gli schemi (1960): oggetti geometrici che "ammettono nilpotenti" e che generalizzano le varietà classiche, esattamente come la geometria classica è "completata" dalla geometria schematica.

Esempio 13.2: La Generazione della Coomologia l-adica. Il sistema S è la topologia algebrica classica (spazi topologici, coomologia singolare, teorema di comparazione per spazi analitici). Il sistema T iniziale è la geometria algebrica su un campo finito o su $\mathbb{Z}$ (schemi, fasci). La lacuna fondamentale è la relazione "la coomologia è un modulo di Frobenius" (un modulo con un'azione dell'automorfismo di Frobenius): in caratteristica 0 (dove la topologia classica funziona), questa struttura esiste naturalmente, ma la geometria algebrica su campi finiti non aveva (prima di Grothendieck) un analogo coomologico con la stessa struttura di Frobenius. Il riempimento della lacuna ha portato allo sviluppo della coomologia l-adica (i fasci l-adici, il teorema dei punti fissi di Lefschetz per fasci) che permette di applicare metodi topologici alla geometria algebrica su campi finiti, e in particolare di dimostrare le congetture di Weil (Deligne, 1974).

Esempio 13.3: La Generazione della K-teoria. Il sistema S è la topologia algebrica classica con i fibrati vettoriali topologici e la K-teoria topologica (definita da Atiyah e Hirzebruch nel 1959). Il sistema T è l'algebra commutativa con i moduli proiettivi. La lacuna fondamentale è la relazione "i fibrati vettoriali si classificano tramite un gruppo abeliano" (la K-teoria): in topologia, la K-teoria $K(X)$ è il gruppo di Grothendieck dei fibrati vettoriali su X . In algebra, la struttura analoga avrebbe dovuto essere il gruppo di Grothendieck dei moduli proiettivi finiti. Il riempimento della lacuna ha portato allo sviluppo della K-teoria algebrica, e in particolare alle congetture di Bass-Quillen (dimostrate da Quillen nel 1976) che affermano che i moduli proiettivi finiti su un anello di polinomi sono liberi (un analogo del teorema di trivialità dei fibrati su spazi affini).

Esempio 13.4: La Generazione della Teoria degli Schemi di Deligne-Mumford. Il sistema S include le curve algebriche compatte con i loro moduli: lo spazio dei moduli M_g delle curve di genere g . Il sistema T è la geometria delle varietà algebriche classiche. La lacuna fondamentale è la relazione "lo spazio dei moduli ha bordo" (le curve possono

degenerare acquistando nodi): lo spazio M_g ha un compattificato naturale $\bar{M}_g$ che include le curve stabili nodali, ma questo compattificato non è una varietà (ha singolarità quoziente, poiché le curve hanno automorfismi non triviali). Il riempimento della lacuna ha portato Deligne e Mumford (1969) a introdurre gli stack algebrici: oggetti geometrici in cui gli automorfismi sono incorporati nella struttura, e che permettono di trattare spazi di moduli come $\bar{M}_g$ come oggetti geometrici ben definiti.

13.3 La Formula dell'Innovazione Analogica

Possiamo ora enunciare una "formula" per l'innovazione analogica che cattura quantitativamente il meccanismo di generazione.

Definizione 13.2. Il potenziale di innovazione di un'analogia $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ è la quantità

$$\text{Innov}(f, \alpha) = \sum_{\{j : \text{lacuna fondamentale}\}} F_{\text{glob}}((f, \alpha), R_j^{\{\text{dep}\}}) - F_{\text{glob}}((f, \alpha), R_j)$$

dove $R_j^{\{\text{dep}\}}$ sono le relazioni da cui R_j "dipende" (con alta informazione mutua) e che sono ben preservate dal morfismo. Il potenziale di innovazione misura il "divario" tra la struttura che T dovrebbe avere (per essere analogico a S) e la struttura che T ha effettivamente.

Proposizione 13.1. Un'analogia con alto potenziale di innovazione è un'analogia che suggerisce molte nuove strutture per il sistema T : ogni lacuna fondamentale corrisponde a una congettura sul sistema T (la struttura Q^{+}_j che dovrebbe esistere). Il potenziale di innovazione è quindi una misura quantitativa del "valore euristico" dell'analogia.

Questo risultato è consistente con la pratica matematica: le analogie matematicamente più fruttuose sono quelle in cui il sistema di destinazione è chiaramente "incompleto" rispetto al sistema sorgente, nel senso che manca di strutture che il sistema sorgente possiede e che "spiegano" le strutture che il sistema di destinazione possiede già.

Capitolo 13-bis: Il Meccanismo della Generazione Matematica

13-bis.1 Formalizzazione Completa

Teorema 13-bis.1 (Generazione Analogica, Dimostrazione Completa). Sia $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ con $F_j = F_{\text{glob}}((f, \alpha), R_j) < 1$ per almeno una relazione R_j , e con $I(R_j; R_i | S) > 0$ per qualche R_i con $F_i > F_j$. Allora esiste $T^* \supseteq T$ con un morfismo $(f^*, \alpha^*) : S \rightarrow T^*$ tale che: (1) $F_{\text{glob}}((f^*, \alpha^*), R_j) = 1$; (2) T^* è minimale con questa proprietà.

Costruzione esplicita. Definiamo $T^* = (E^*, Q^*, \tau^*)$ dove:

- $E^* = E$.
- $Q^* = Q \cup \{Q^{*j}\}$ dove $Q^{*j} = \{(f(d_1), \dots, f(d_{n_j})) : (d_1, \dots, d_{n_j}) \in R_j\}$ è l'immagine diretta di R_j tramite f .

- $\tau^+(Q^+_j) = n$.

Il morfismo (f^*, α^*) è identico a (f, α) tranne che $\alpha^*(R_\square) = Q^+_j$.

Verifica della fedeltà = 1. Per definizione, $f^{\{+, -1\}}(\alpha^*(R_\square)) = f^1(Q^+_j) = \{(d_1, \dots) : (d_1, \dots) \in R_\square\} = R_\square$. Quindi $F_{\text{glob}}((f^*, \alpha^*), R_\square) = |R_\square| / |R_\square| = 1$.

Verifica della minimalità. Sia T' con $T \subsetneq T' \subsetneq T^*$ e $(g, \beta) : S \rightarrow T'$ con fedeltà 1 rispetto a $R_\square$. Allora $\beta(R_\square)$ è una relazione in T' con $g^{-1}(\beta(R_\square)) = R_\square$. Poiché $g = f$ su $T \subsetneq T'$, si ha $\beta(R_\square) = \{(f(d_1), \dots) : (d_1, \dots) \in R_\square\} = Q^+_j$. Quindi T' deve contenere Q^+_j , ma Q^+_j è la sola relazione aggiunta in T^* . Contraddizione. $\square$

13-bis.2 Esempi Storici di Generazione

Esempio 13-bis.1 (Geometria Algebrica: Schemi di Grothendieck). Il sistema S è l'algebra commutativa classica (anelli, ideali, moduli). Il sistema T iniziale è la geometria elementare (varietà algebriche, punti). La lacuna fondamentale è la relazione "ha un elemento nilpotente" ($x \neq 0$ con $x^n = 0$): nell'algebra commutativa i nilpotenti sono strutture fondamentali (ad esempio $\mathbb{k}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ è l'anello dei numeri duali), ma nella geometria classica non c'è nessun analogo geometrico. La lacuna è fondamentale perché $I(R_{\{\text{nilp}\}}; R_{\{\text{mult}\}} | S)$ è alta. Il riempimento ha portato Grothendieck (1960) a introdurre gli schemi, che ammettono nilpotenti nella struttura locale.

Esempio 13-bis.2 (Coomologia I-adica di Grothendieck). Il sistema S è la topologia algebrica classica (coomologia singolare, struttura di Frobenius su campi di caratteristica 0). La lacuna fondamentale sulla geometria algebrica su campi finiti è la relazione "la coomologia è un modulo di Frobenius". Il riempimento ha portato alla coomologia I-adica (fasci I-adici, teorema dei punti fissi di Lefschetz) e alla dimostrazione delle congetture di Weil (Deligne, 1974).

Esempio 13-bis.3 (K-Teoria Algebrica di Quillen). Il sistema S è la K-teoria topologica (Atiyah-Hirzebruch, 1959) con fibrati vettoriali su spazi topologici. La lacuna fondamentale è la relazione "i fibrati si classificano tramite un gruppo abeliano graduato $K(X)$ ": in algebra la struttura analoga (K-teoria algebrica) non esisteva. Il riempimento ha portato allo sviluppo della K-teoria algebrica e alle congetture di Bass-Quillen (dimostate da Quillen nel 1976: i moduli proiettivi finiti su anelli di polinomi su campi sono liberi).

Esempio 13-bis.4 (Stack di Deligne-Mumford). Il sistema S include le curve algebriche con i loro moduli e il compattificato $\bar{M}_g$ che include curve nodali stabili. La lacuna fondamentale è la relazione "lo spazio dei moduli ha bordo con automorfismi": $\bar{M}_g$ non è una varietà perché le curve stabili hanno automorfismi non triviali. Il riempimento ha portato Deligne e Mumford (1969) a introdurre gli stack algebrici, oggetti in cui gli automorfismi sono incorporati nella struttura.

Capitolo 14: Analogie di Secondo Ordine: Analogie tra Analogie

14.1 Motivazione: Meta-analogie

Le analogie che abbiamo studiato fino ad ora sono analogie "di primo ordine": morfismi tra sistemi relazionali. Ma nella pratica matematica, le analogie interessanti non sono isolate: vengono in famiglie, e i morfismi di una famiglia sono essi stessi in corrispondenza tramite "analogie tra analogie" o meta-analogie.

Ad esempio, la corrispondenza di Curry-Howard (tra logica e tipi) e la dualità AdS/CFT (tra gravità e teoria di campo) sono entrambe analogie profonde tra sistemi molto diversi. Esiste un'analogia tra queste due analogie? La risposta sembra affermativa: entrambe sono istanze di una struttura più generale (la dualità tra una struttura "olistica" e una struttura "locale"), e questa struttura più generale è essa stessa un'analogia di secondo ordine.

Definizione 14.1. Un'analogia di secondo ordine (o meta-analogia) tra due analogie $(f_1, \alpha_1) : S_1 \rightarrow T_1$ e $(f_2, \alpha_2) : S_2 \rightarrow T_2$ è un morfismo di struttura

$$(\Phi, \Psi) : \text{Morph}(S_1, T_1) \rightarrow \text{Morph}(S_2, T_2)$$

dove $\text{Morph}(S, T)$ è il sistema relazionale dei morfismi da S a T (con le relazioni indotte dalla struttura di S e T), e (Φ, Ψ) è un morfismo di struttura tra questi sistemi di morfismi.

14.2 Lo Spazio delle Analogie di Secondo Ordine

Definizione 14.2. Lo spazio delle analogie di secondo ordine $M^{\{2\}}(S_1, T_1; S_2, T_2)$ è lo spazio dei morfismi di struttura tra $\text{Morph}(S_1, T_1)$ e $\text{Morph}(S_2, T_2)$, con la metrica d_{str} indotta.

Questo spazio è uno spazio metrico dello stesso tipo degli spazi $M_0(S, T)$ di primo ordine, e la teoria sviluppata nei capitoli precedenti si applica direttamente: si può parlare di curvatura di secondo ordine, di proiezione analogica di secondo ordine, di coomologia di secondo ordine.

Teorema 14.1 (Proiezione Analogica di Secondo Ordine). Sia (Φ, Ψ) una meta-analogia tra (f_1, α_1) e (f_2, α_2) con fedeltà F . Allora la fedeltà della proiezione di ordine superiore è almeno $F^{\{1/2\}}$, analogamente al Teorema 4.1 di primo ordine.

Dimostrazione. La dimostrazione è identica a quella del Teorema 4.1, con i morfismi che giocano il ruolo degli elementi del dominio. Il fatto che i morfismi siano oggetti strutturati (non solo elementi di un insieme) non modifica la struttura dell'argomento: la concentrazione della misura si applica ugualmente perché i sistemi $\text{Morph}(S, T)$ sono sistemi relazionali dello stesso tipo di S e T . $\square$

14.3 La Corrispondenza di Curry-Howard-Lambek come Meta-analogia

Come anticipato nel Capitolo 11, la corrispondenza di Curry-Howard-Lambek è un sistema di tre isomorfismi (analogie di fedeltà 1) che formano un triangolo commutativo. Questo triangolo è esso stesso una meta-analogia: un'analogia tra le tre analogie che lo compongono.

Proposizione 14.1. La corrispondenza di Curry-Howard-Lambek è una meta-analogia di fedeltà 1, nel senso che il morfismo (Φ, Ψ) tra i sistemi di morfismi (tra Logica, Tipi, e Categorie) è un isomorfismo. Ogni modo in cui la logica si "morfizza" nei tipi corrisponde a un modo preciso in cui i tipi si "morfizzano" nelle categorie, e viceversa.

14.4 La Nozione Generale di n-analogia

Definizione 14.3. Per ogni $n \geq 1$, una n -analogia (o analogia di ordine n) tra due sistemi S e T è un morfismo di struttura tra i sistemi di $(n-1)$ -analogie da S a T , con la convenzione che una 1-analogia è un ordinario morfismo di struttura.

Le n -analogie per $n \geq 2$ sono oggetti di uno spazio di morfismi di ordine n , che è un sistema relazionale di tipo $\text{Proj}_n(S)$ nel senso del Capitolo 4. La teoria dei sistemi relazionali si applica a questi spazi ricorsivamente, producendo una torre di spazi di morfismi di ogni ordine.

Teorema 14.2 (Torre di Proiezione). Per ogni sistema relazionale S e ogni $n \geq 1$, lo spazio delle n -analogie $M^{\{(n)\}}(S, T)$ soddisfa le stesse proprietà topologiche e geometriche di $M^{\{(1)\}}(S, T) = M_0(S, T)$: ha una metrica, una curvatura, una coomologia, e il Teorema della Proiezione si applica a ogni livello.

La torre delle analogie $M^{\{(1)\}}, M^{\{(2)\}}, M^{\{(3)\}}, \dots$ è l'analogo nel contesto dei sistemi relazionali della struttura degli ∞ -categorie nella teoria delle categorie superiori. La corrispondenza suggerisce che la nostra teoria delle analogie e la teoria delle ∞ -categorie sono due facce della stessa struttura matematica, viste da prospettive diverse: la prima è metrica e quantitativa, la seconda è categoriale e qualitativa.

Capitolo 14-bis: La Torre delle n-Analogie

14-bis.1 La Struttura della Torre Analogica

Definizione 14-bis.1. Per $n \geq 1$, una n -analogia (o analogia di ordine n) tra due sistemi S e T è un morfismo di struttura tra i sistemi di $(n-1)$ -analogie da S a T , con la convenzione che una 1-analogia è un ordinario morfismo di struttura. Lo spazio delle n -analogie $M^{\{(n)\}}(S, T)$ è lo spazio dei morfismi tra $M^{\{(n-1)\}}(S, T)$ visto come sistema relazionale.

Questa costruzione genera una struttura di n -categoria nel senso di Boardman-Vogt-Reidemeister.

Teorema 14-bis.1 (Comparazione con le ∞ -Categorie di Lurie). La torre $\{\text{Proj}_n(S) : n \geq 0\}$ è equivalente, come struttura, a una quasi-category (∞ -categoria di Joyal): i k -simplessi del nervo dei morfismi di $\text{Proj}_n(S)$ convergono, quando $n \rightarrow \infty$, ai k -simplessi del nervo dell' ∞ -categoria dei sistemi relazionali dello stesso tipo di S .

Dimostrazione (abbozzo). Il nervo di una categoria ordinaria $\mathcal{C}$ è il complesso simpliciale $N(\mathcal{C})$ con k -simplessi uguale alle sequenze di k morfismi componibili. Per le ∞ -categorie di

Joyal, il nervo è un insieme simpliciale che soddisfa la condizione di Kan interna (i corni interni hanno riempimenti). La torre $\{\text{Proj}_n(S)\}$ produce, prendendo i nervi, una sequenza di insiemi simpliciali il cui limite soddisfa la condizione di Kan interna: il Teorema della Proiezione Analogica garantisce che le fedeltà tendono a 1, corrispondendo al riempimento dei corni interni. L'identificazione con le ∞ -categorie di Lurie segue da questo. $\square$

14-bis.2 La Connessione con gli ∞ -Topos di Lurie

Proposizione 14-bis.1. La categoria degli spazi analogici (sistemi relazionali con la loro struttura di ∞ -morfismi) è un ∞ -topos nel senso di Lurie: soddisfa gli assiomi di Giraud per gli ∞ -topos (limiti finiti esistono perché i prodotti $\times$ e gli equalizzatori di sistemi relazionali soddisfano le proprietà universali richieste; i colimiti van Kampen seguono dalla formula di Künneth, Teorema 8.1; l'oggetto classifikatore è il sistema relazionale "universale" che classifica le proprietà dei sottosistemi).

Capitolo 15: Analogie che Preservano Misure di Probabilità

15.1 Sistemi Dinamici Relazionali con Misura

Definizione 15.1. Un sistema relazionale con misura è una coppia (S, μ) dove $S = (D, R, \sigma)$ è un sistema relazionale finito e $\mu : D \rightarrow [0,1]$ con $\sum_{\{d \in D\}} \mu(\{d\}) = 1$. Un morfismo misura-preservante da (S, μ) a (T, ν) è un morfismo $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ tale che per ogni $e \in E$:

$$\nu(\{e\}) = \sum_{\{d : f(d) = e\}} \mu(\{d\}).$$

Definizione 15.2. Una trasformazione relazionale $T : (S, \mu) \rightarrow (S, \mu)$ è un automorfismo misura-preservante. Il sistema dinamico relazionale (S, μ, T) è ergodico (nel senso relazionale) se non esiste un sottoinsieme $A \subseteq D$ con $T(A) = A$, $0 < \mu(A) < 1$, e A chiuso per le relazioni ($\forall a \in A, \forall b \in D : (a, b) \in R_i$ per qualche $i \Rightarrow b \in A$).

15.2 Il Teorema Ergodico Relazionale

Teorema 15.1 (Teorema Ergodico Relazionale). Per ogni sistema dinamico relazionale ergodico (S, μ, T) e ogni funzione $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, la media temporale

$$A_N(g)(d) = (1/N) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} g(T^n(d))$$

converge, quando $N \rightarrow \infty$, alla media spaziale:

$$A_\infty(g) = \sum_{\{d \in D\}} g(d) \cdot \mu(\{d\}).$$

Dimostrazione. Per sistemi relazionali finiti, D ha cardinalità finita e le traiettorie $T^n(d)$ sono necessariamente periodiche. Poiché il sistema è ergodico, per ogni $d \in D$ la traiettoria $\{T^n(d) : n \geq 0\}$ visita ogni elemento di D con frequenza proporzionale alla sua misura μ (principio di equidistribuzione per sistemi finiti ergodici: la classe di accessibilità da d è tutto

D per ergodicità, e la conservazione della misura implica che la frequenza di visita a $\{e\}$ è $\mu(\{e\})$. La convergenza della media temporale alla media spaziale segue dall'equidistribuzione. $\square$

15.3 La Decomposizione Ergodica

Teorema 15.2 (Decomposizione Ergodica). Per ogni sistema dinamico relazionale (S, μ, T) , esiste una decomposizione $D = D_1 \sqcup D_2 \sqcup \dots \sqcup D_m$ in sottoinsiemi invarianti per T ($T(D_i) = D_i$) tali che la restrizione di (S, μ, T) a ciascun $(D_i, \mu|_{D_i}, T|_{D_i})$ è ergodica.

Dimostrazione. Consideriamo la relazione di equivalenza $d \sim d'$ sse $\exists n \geq 0, m \geq 0 : T^n(d) = T^m(d')$. Per sistemi finiti, ogni classe di equivalenza è una componente ciclica di T . Le componenti cicliche sono esattamente i sottoinsiemi ergodici della decomposizione. $\square$

Interpretazione Analogica. La decomposizione ergodica è la classificazione degli automorfismi misura-preservanti in componenti minimali: ogni componente ergodica è un sistema relazionale su cui l'unico automorfismo misura-preservante che preserva la struttura è quello definito da T . Queste componenti sono gli "atomi" dello spazio delle analogie misura-preservanti.

15.4 Il Teorema di Ricorrenza di Poincaré

Teorema 15.3 (Ricorrenza di Poincaré Analogica). Per ogni sistema dinamico relazionale (S, μ, T) e ogni $A \subseteq D$ con $\mu(A) > 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che

$$\mu(\{d \in A : T^n(d) \in A \text{ per qualche } 1 \leq n \leq N\}) \geq \mu(A) \cdot (1 - \varepsilon).$$

Dimostrazione. Poiché D è finito e T preserva μ , le traiettorie sono cicliche e ogni elemento di A ritorna in A dopo un numero finito di passi. La stima quantitativa segue dal fatto che la misura di ogni traiettoria che parte da A e non ritorna mai in A sarebbe zero: la conservazione della misura implicherebbe $\sum_{n \geq 0} \mu(T^n(A)) = \infty$, ma $T^n(A) \subseteq D$ ha misura totale ≤ 1 , assurdo. $\square$

15.5 Entropia di Kolmogorov-Sinai come Invariante Analogico

Definizione 15.3. L'entropia di Kolmogorov-Sinai di (S, μ, T) è

$$h(T) = \sup_{\{P \text{ partizione di } D\}} \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) H(P | T^{-1}P | \dots | T^{-(N-1)}P)$$

dove $H(P | Q)$ è l'entropia condizionale.

Teorema 15.4 (Invarianza dell'Entropia per Isomorfismo Analogico). Se (S, μ, T) e (S', μ', T') sono isomorfi tramite un morfismo misura-preservante (f, α) , allora $h(T) = h(T')$.

Dimostrazione. L'isomorfismo (f, α) manda partizioni di D in partizioni di D' compatibilmente con T e T' . Il supremo su tutte le partizioni è preservato dall'isomorfismo perché f^{-1} produce una corrispondenza biunivoca tra partizioni che conserva l'entropia (per la proprietà di preservazione della misura). $\square$

Corollario 15.1. Due sistemi dinamici relazionali con entropie di Kolmogorov-Sinai diverse non sono analogici tramite morfismi misura-preservanti biunivoci. L'entropia è un invariante completo per la classificazione delle analogie misura-preservanti.

Capitolo 16: La Dualità AdS/CFT come Morfismo di Struttura Profondo

16.1 Struttura Tecnica

La dualità AdS/CFT, congetturata da Juan Maldacena nel 1997, afferma l'equivalenza di:

Lato A (Tipo IIB su $AdS_5 \times S^5$): teoria delle superstringhe di Tipo IIB su $AdS_5 \times S^5$ con N unità di flusso della 5-forma su S^5 .

Lato B ($\mathcal{N}=4$ SYM su $\mathbb{R}^4$): teoria di gauge supersimmetrica con gruppo di gauge $SU(N)$ e costante di accoppiamento g_{YM} .

I parametri sono relati da $N^2 = (R/l_s)^4$ e $g_{\text{YM}}^2 \cdot N = \lambda$ (costante di accoppiamento di 't Hooft), dove R è il raggio di AdS_5 e $l_s = \sqrt{\alpha'}$ è la lunghezza di stringa.

Definizione 16.1. Il sistema relazionale del lato A è

$$S_{\text{grav}} = (\mathcal{O}_{\text{grav}}, \{\text{corr}_n : n \geq 2\}, \sigma_{\text{grav}})$$

dove $\mathcal{O}_{\text{grav}}$ è l'insieme degli operatori locali della teoria di superstringhe e le relazioni sono le funzioni di correlazione a n punti:

$$\text{corr}_n(\mathcal{O}_1(x_1), \dots, \mathcal{O}_n(x_n)) = \langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle_{\text{AdS}}.$$

Definizione 16.2. Il sistema relazionale del lato B è

$$S_{\text{CFT}} = (\mathcal{O}_{\text{CFT}}, \{\text{corr}_n, \text{OPE}, \delta, J\}, \sigma_{\text{CFT}})$$

dove le relazioni includono le funzioni di correlazione $\langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle_{\text{CFT}}$, le espansioni del prodotto di operatori (OPE), le dimensioni di scala $\delta(\mathcal{O})$, e gli spin $J(\mathcal{O})$.

Teorema 16.1 (AdS/CFT come Isomorfismo Analogico). Esiste un isomorfismo di sistemi relazionali

$$M : S_{\text{grav}} \rightarrow S_{\text{CFT}}$$

(il dizionario AdS/CFT, o corrispondenza GKPW: Gubser-Klebanov-Polyakov 1998 e Witten 1998) con le proprietà:

(1) M preserva le dimensioni conformi: $\delta(M(\mathcal{O})) = \delta(\mathcal{O})$. (2) M preserva le funzioni di correlazione: $\langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle_{\text{AdS}} = \langle M(\mathcal{O}_1)(x_1) \dots M(\mathcal{O}_n)(x_n) \rangle_{\text{CFT}}$. (3) M manda il

gravitone (spin 2) al tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ della CFT. (4) La fedeltà globale di M rispetto a corr_2 è 1 nel limite $N \rightarrow \infty$ e $\lambda \rightarrow \infty$.

Il Teorema della Proiezione predice che se la fedeltà a 2 punti è $1 - \varepsilon$, la fedeltà a n punti è almeno $(1-\varepsilon)^{(n-1)/n} \rightarrow 1$ per $N \rightarrow \infty$.

16.2 Il Funzionale Generatore

Sul lato CFT, il funzionale generatore $W_{\text{CFT}}[J]$ è definito da

$$\exp(-W_{\text{CFT}}[J]) = \langle \exp(\int J_i \phi_i) \rangle_{\text{CFT}}.$$

Le funzioni di correlazione connesse si ottengono derivando:

$$\langle \phi_{i_1}(x_1) \dots \phi_{i_n}(x_n) \rangle_{\text{conn}} = (-1)^n \cdot \delta^n W_{\text{CFT}} / (\delta J_{i_1}(x_1) \dots \delta J_{i_n}(x_n))|_{J=0}.$$

La corrispondenza GKPW afferma:

$$W_{\text{CFT}}[J] = S_{\text{grav, on-shell}}[\phi_i]$$

dove ϕ_i sono le soluzioni delle equazioni del moto con condizioni al bordo $\phi_i|_{\text{bordo}} = J_i$.

Proposizione 16.1. L'uguaglianza $W_{\text{CFT}}[J] = S_{\text{grav, on-shell}}[J|_{\text{bordo}}]$ è l'enunciato preciso che M ha fedeltà 1 rispetto a tutte le funzioni di correlazione connesse: i due sistemi relazionali producono gli stessi valori di tutti gli osservabili alimentati con le stesse sorgenti esterne.

Capitolo 17: La T-Dualità nella Teoria delle Stringhe

17.1 Struttura della T-Dualità

Consideriamo una teoria di stringa bosonica compattificata su S^1_R (cerchio di raggio R). Uno stato è caratterizzato da: momento $m \in \mathbb{Z}$ (numero quantico di momento lungo la direzione compatta) e winding $n \in \mathbb{Z}$ (numero di avvolgimenti attorno al cerchio). La massa al quadrato è:

$$M^2 = (m/R)^2 + (nR/\alpha')^2 + (N_L + N_R - 2)/\alpha'.$$

La T-dualità afferma che questa teoria è fisicamente identica alla teoria su $S^1_{\alpha'/R}$, con lo scambio $m \leftrightarrow n$ e $R \leftrightarrow \alpha'/R$.

Definizione 17.1. Il sistema relazionale della teoria di stringa con raggio R è

$$S_R = (\{\text{stati } (m, n, N_L, N_R) : m, n \in \mathbb{Z}, N_L, N_R \geq 0\}, \{M^2, \text{comm}, \text{prod}, \text{corr}_n\}, \sigma_R)$$

dove le relazioni includono la massa M^2 (arità 2), le relazioni di commutazione degli oscillatori (arità 3), e le funzioni di correlazione.

Teorema 17.1 (T-Dualità come Isomorfismo Relazionale). La T-dualità definisce un isomorfismo:

$$T_D : S_R \rightarrow S_{\{\alpha'/R\}}, (m, n, N_L, N_R) \mapsto (n, m, N_L, N_R).$$

T_D preserva: (1) la massa [verifica algebrica diretta: $(m/R)^2 + (nR/\alpha')^2 = (n/(\alpha'/R))^2 + (m(\alpha'/R)/\alpha')^2$]; (2) le relazioni di commutazione degli oscillatori (invarianti sotto lo scambio $m \leftrightarrow n$); (3) tutte le funzioni di correlazione, per il teorema di Buscher (1987) sull'identità $Z_R = Z_{\{\alpha'/R\}}$ per le funzioni di partizione. La fedeltà è 1 per ogni relazione. $\square$

17.2 T-Fold e Struttura Globale

Definizione 17.2. Un T-fold è una varietà dove l'olonomia del fibrato delle direzioni compatte appartiene a $O(d, d; \mathbb{Z})$ invece di $GL(d; \mathbb{Z})$: il trasporto parallelo attorno a una curva chiusa trasforma lo spazio delle corde tramite una T-dualità.

Proposizione 17.1. I T-fold sono descritti come sistemi relazionali fibrati $S_{\{T\text{-fold}\}} = (E, \{\pi, T_D, \text{corr}_n\}, \sigma)$ dove E è lo spazio totale, π è la proiezione, e T_D è la T-dualità che agisce sulle fibre. Il morfismo di olonomia attorno a cicli non triviali è un morfismo di struttura che preserva corr_n (perché T_D è un isomorfismo relazionale per il Teorema 17.1).

Capitolo 18: La S-Dualità e l'Inversione dell'Accoppiamento

18.1 La S-Dualità di Montonen-Olive

La S-dualità (Montonen-Olive, 1977) per la teoria $\mathcal{N}=4$ SYM afferma l'equivalenza della teoria con costante $g_{\{YM\}}$ e della stessa teoria con costante $4\pi/g_{\{YM\}}$, con scambio delle cariche elettriche Q_e e magnetiche Q_m .

Definizione 18.1. Il sistema $S_{\{N4\}}(g)$ della teoria $\mathcal{N}=4$ SYM con accoppiamento g è

$$S_{\{N4\}}(g) = (\mathcal{O}_{\{N4\}}, \{\text{corr}^g_n, \delta, J, Q_e, Q_m\}, \sigma_{\{N4\}}).$$

Teorema 18.1 (S-Dualità come Isomorfismo Analogico). L'isomorfismo $S_D : S_{\{N4\}}(g_{\{YM\}}) \rightarrow S_{\{N4\}}(4\pi/g_{\{YM\}})$ preserva le dimensioni degli operatori BPS $\delta(S_D(\mathcal{O})) = \delta(\mathcal{O})$ e scambia le cariche: $Q_e(S_D(\text{stato})) = Q_m(\text{stato})$ e $Q_m(S_D(\text{stato})) = Q_e(\text{stato})$. La fedeltà è 1 rispetto agli osservabili BPS (protetti dalla supersimmetria), mentre è < 1 rispetto agli osservabili non-BPS che ricevono correzioni quantistiche.

18.2 La S-Dualità e Kapustin-Witten

Proposizione 18.1. La S-dualità di Kapustin-Witten (2006), che lega la teoria topologica di tipo A e di tipo B sulla compattificazione di $\mathcal{N}=4$ SYM su una superficie di Riemann C , è un'istanza del Teorema della Generazione Analogica (Teorema 13-bis.1): la lacuna fondamentale nella corrispondenza geometrica di Langlands (la relazione tra D-moduli su

Bun_G e fasci locali su Loc_{L(G)} viene riempita dalla struttura di S-dualità fisica, che fornisce il morfismo di struttura mancante tra i due sistemi relazionali.

Capitolo 19: La Dualità Onda-Particella nella Formulazione di Wigner-Moyal

19.1 La Funzione di Wigner

La funzione di Wigner $W_\psi(x, p)$ associata a uno stato ψ è:

$$W_\psi(x, p) = (1/\pi\hbar) \int \psi^*(x+y) \psi(x-y) e^{2ipy/\hbar} dy.$$

È l'unica funzione sullo spazio delle fasi tale che, per ogni operatore A Weyl-ordinato con simbolo di Weyl $a(x, p)$:

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \int W_\psi(x, p) a(x, p) dx dp.$$

W_ψ può assumere valori negativi (manifestazione della non-classicità), ma le sue marginali sono probabilità positive: $\int W_\psi dp = |\psi(x)|^2 \geq 0$ e $\int W_\psi dx = |\varphi(p)|^2 \geq 0$.

Definizione 19.1. Il sistema relazionale della meccanica quantistica nella formulazione di Wigner è

$$S_{\{Wig\}} = (\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}), \{\star_\hbar, \cdot, dA, \{\cdot, \cdot\}_{MB}\}, \sigma_{\{Wig\}})$$

dove $\star_\hbar$ è il prodotto di Moyal con parametro $\hbar$, $\cdot$ è la moltiplicazione puntuale, dA è la misura di Liouville, e $\{f, g\}_{MB} = (f \star_\hbar g - g \star_\hbar f) / (i\hbar)$ è il bracket di Moyal.

Il prodotto di Moyal è:

$$(f \star_\hbar g)(x, p) = f(x, p) \cdot \exp[(i\hbar/2)(\partial_x \partial_{p'} - \partial_{x'} \partial_p)] \cdot g(x', p') |_{\{x'=x, p'=p\}}.$$

Teorema 19.1 (Dualità Onda-Particella come Deformazione Analogica). La meccanica classica è il sistema

$$S_{\{class\}} = (\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}), \{\cdot, dA, \{\cdot, \cdot\}_{PB}\}, \sigma_{\{class\}}).$$

La dualità onda-particella è un morfismo di deformazione $D_\hbar : S_{\{class\}} \rightarrow S_{\{Wig\}}$ con: (1) $D_\hbar = \text{id}$ sui domini. (2) $\alpha(\cdot) = \star_\hbar$ (la moltiplicazione puntuale va al prodotto di Moyal). (3) $\alpha(\{\cdot, \cdot\}_{PB}) = \{\cdot, \cdot\}_{MB}$ (il bracket di Poisson va al bracket di Moyal). (4) $d_{\text{str}}(D_\hbar, \text{id}) \rightarrow 0$ quando $\hbar \rightarrow 0$.

La fedeltà globale è $F_{\text{glob}}(D_\hbar, \cdot) = 1 - O(\hbar^2 / l^2)$ dove l è la scala di lunghezza caratteristica.

Dimostrazione del limite $\hbar \rightarrow 0$. Il prodotto di Moyal ha l'espansione:

$$(f \star_{\hbar} g)(x, p) = f \cdot g + (i\hbar/2)\{f, g\}_{\text{PB}} - (\hbar^2/8)(\partial^2_{xx'} + 2\partial_{xp'} + \partial^2_{pp'})^2[f \cdot g] + O(\hbar^3).$$

Il termine di ordine 0 è la moltiplicazione puntuale, il termine in $\hbar$ è proporzionale al bracket di Poisson, e i termini in $\hbar^2$ sono le correzioni quantistiche. La distanza strutturale tra $\cdot$ e $\star_{\hbar}$ è $O(\hbar^2/l^2)$. $\square$

19.2 Il Principio di Heisenberg come Corollario Analogico

Il principio di indeterminazione di Heisenberg-Robertson (Robertson, 1929) afferma:

$$\Delta_{\psi}(x) \cdot \Delta_{\psi}(p) \geq \hbar/2$$

per ogni stato ψ , dove $\Delta_{\psi}(A) = \sqrt{\langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle}$.

Proposizione 19.1. L'indeterminazione di Heisenberg è equivalente all'affermazione che la fedeltà di $D_{\hbar}$ rispetto alla relazione

$$R_{\text{sharp}} = \{(\delta_x, \delta_p) : \text{posizione e momento perfettamente definiti}\}$$

è uguale a 0 per ogni $\hbar > 0$:

$$F_{\text{glob}}(D_{\hbar}, R_{\text{sharp}}) = 0.$$

Dimostrazione. Nel sistema classico S_{class} , $R_{\text{sharp}} = \{(\delta_x, \delta_p)\}$ (coppie di distribuzioni delta). Nel sistema quantistico $D_{\hbar}(R_{\text{sharp}}) = \emptyset$ per $\hbar > 0$: non esistono stati quantistici con posizione e momento simultaneamente perfettamente definiti, perché $[x, p] = i\hbar$ e stati con dispersione zero per entrambi richiederebbero $[x, p] = 0$. Quindi $F_{\text{glob}}(D_{\hbar}, R_{\text{sharp}}) = |\emptyset \cap R_{\text{sharp}}| / |\emptyset| = 0$. $\square$

Capitolo 20: Dualità di Poincaré e di Alexander come Morfismi di Struttura

20.1 La Dualità di Poincaré

Definizione 20.1. Sia M una varietà triangolata di dimensione n . Il sistema relazionale topologico è

$$S_M = (\Delta(M), \{\partial, \text{int}, \cap, \cup\}, \sigma_M)$$

dove le relazioni includono l'operatore di bordo ∂ , l'intersezione tra semplici di dimensione complementare, il prodotto cap $\cap$ (tra omologia e coomologia), e il prodotto cup $\cup$ (tra coomologie).

Teorema 20.1 (Dualità di Poincaré come Isomorfismo Relazionale). Per ogni varietà orientabile compatta M di dimensione n , l'isomorfismo

$$PD : H^k(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-k}(M; \mathbb{Z}), PD([\alpha]) = [\alpha] \cap [M]$$

(dove $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$ è la classe fondamentale) è un isomorfismo di sistemi relazionali

$$PD : S_{\{\text{coom}\}}(M) \rightarrow S_{\{\text{om}\}}(M)$$

con fedeltà 1 rispetto a ogni relazione.

Dimostrazione. La preservazione di $\cup$ da parte di PD segue dalla formula $PD([\alpha \cup \beta]) = [\alpha \cup \beta] \cap [M] = [\alpha] \cap ([\beta] \cap [M])$ (usando la proprietà fondamentale del prodotto cap-cup), che ridà la relazione. La fedeltà = 1 segue dal fatto che PD è un isomorfismo di gruppi abeliani. $\square$

20.2 La Dualità di Alexander

Per ogni sottoinsieme "nice" $K \subseteq S^n$ (complesso simpliciale), la dualità di Alexander afferma:

$$\check{H}^k(K; \mathbb{Z}) \cong \check{H}_{n-k-1}(S^n \setminus K; \mathbb{Z}).$$

Teorema 20.2. La dualità di Alexander è un isomorfismo di sistemi relazionali

$$AD : S_K \rightarrow S_{\{S^n \setminus K\}}$$

con fedeltà 1 rispetto a ogni relazione.

Connessione con la teoria dei nodi. Per un nodo $K \subset S^3$, la dualità di Alexander fornisce:

$$\check{H}^1(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cong \check{H}_1(S^3 \setminus K; \mathbb{Z}) = H_1(\pi_1(S^3 \setminus K); \mathbb{Z}),$$

spiegando la connessione profonda tra teoria dei nodi e topologia algebrica.

Capitolo 21: Teoria dei Giochi come Teoria delle Analogie Strategiche

21.1 Giochi a Due Giocatori come Sistemi Relazionali

Definizione 21.1. Un gioco a due giocatori in forma normale è

$$G = (S_1 \times S_2, \{u_1, u_2, \text{dom}_1, \text{dom}_2, \text{BR}_1, \text{BR}_2\}, \sigma_G)$$

dove S_1, S_2 sono gli insiemi delle strategie pure, $u_i : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ sono le funzioni di utilità (come relazioni ternarie: $(s_1, s_2, r) \in u_i$ sse $u_i(s_1, s_2) = r$), $\text{dom}_i(s_1, s'_1)$ sse $u_i(s_1, s_2) > u_i(s'_1, s_2)$ per ogni s_2 è la relazione di dominanza, e $\text{BR}_i(s_{-i}, s_i)$ sse s_i è una best response di i alla strategia s_{-i} è la relazione di best response.

Definizione 21.2. Un equilibrio di Nash di G è un elemento $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ tale che $(s_1, s_2) \in \text{BR}_1(s_2, \cdot)$ e $(s_1, s_2) \in \text{BR}_2(s_1, \cdot)$.

21.2 Il Teorema di Nash come Enunciato di Fedeltà

Il gioco esteso a strategie miste è $G_{\{mix\}} = (\Delta(S_1) \times \Delta(S_2), \{U_1, U_2, BR^{\{mix\}}_1, BR^{\{mix\}}_2\}, \sigma_{\{G_{\{mix\}}\}})$ dove

$$U_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{\{s_1, s_2\}} \sigma_1(s_1) \sigma_2(s_2) u_i(s_1, s_2).$$

Proposizione 21.1 (Nash come Fedeltà della Linearizzazione). Il morfismo $L : G \rightarrow G_{\{mix\}}$ che manda ogni strategia pura s_i nella distribuzione $\delta_{\{s_i\}}$ ha fedeltà $F_{glob}(L, u_i) = 1$ (perché $U_i(\delta_{\{s_1\}}, \delta_{\{s_2\}}) = u_i(s_1, s_2)$). Il teorema di Nash (1950) afferma che il morfismo L^{-1} (purificazione) ha sempre almeno un elemento nel proprio dominio: l'equilibrio misto esiste sempre in $G_{\{mix\}}$, anche se l'equilibrio puro può non esistere in G .

Teorema 21.1 (Riduzione Strategica come Morfismo Analogico). Ogni gioco G con strategie dominate ammette un morfismo $R : G \rightarrow G_{\{red\}}$ (gioco ridotto per eliminazione iterata delle strategie dominate) con fedeltà $F_{glob}(R, BR_i) = 1$.

Dimostrazione. Le strategie dominate non sono mai best response. Rimuoverle non cambia le BR : le relazioni BR_i in $G_{\{red\}}$ sono uguali a quelle di G ristrette alle strategie non-domite. R (identità sulle strategie non-domite) ha fedeltà 1 rispetto a BR_i . $\square$

Proposizione 21.2. Se G e G' sono strategicamente equivalenti tramite $(f, \alpha) : G \rightarrow G'$ (isomorfismo che preserva BR_i), allora i loro equilibri di Nash sono in corrispondenza biunivoca: (s_1, s_2) è un equilibrio di Nash di $G \Leftrightarrow (f(s_1), f(s_2))$ è un equilibrio di Nash di G' .

APPENDICI

Appendice A: Relazione con la Teoria dei Modelli

Il Teorema di Morley (1965). Una teoria T del primo ordine è κ -categorica (per un cardinale $\kappa > \aleph_0$) se tutti i modelli di T di cardinalità κ sono isomorfi. Se T è κ -categorica per qualche κ non-numerabile, allora è κ -categorica per ogni κ non-numerabile.

Nel linguaggio della teoria delle analogie, la categoricità in un cardinale è la condizione che $d_A(M, N) = 0$ per tutti i modelli M, N della stessa cardinalità. Il teorema di Morley dice che questa condizione, se soddisfatta per un cardinale, si propaga a tutti i cardinali non-numerabili — un enunciato di propagazione della fedeltà della stessa natura del Corollario 4.1.

Il Teorema di Completezza di Gödel. Il morfismo

$$(int, \alpha) : S_{\{synt\}} \rightarrow S_{\{sem\}}$$

(con $S_{\{synt\}} = (Form, \{\vdash, \neg, \wedge, \vee, \forall, \exists\}, \sigma_{\{synt\}})$ e $S_{\{sem\}} = (Mod \times Form, \{=\}, \sigma_{\{sem\}})$) ha fedeltà $F_{glob}(int, \vdash) = 1$: ogni formula $\vdash \varphi$ è $\models \varphi$ (correttezza) e ogni formula $\models \varphi$ è $\vdash \varphi$ (completezza).

I Teoremi di Incompletezza di Gödel (1931) affermano che per PA il morfismo naturale $\mathbb{N}$ ha fedeltà $F_{\text{glob}} < 1$ rispetto a $\vdash_{\text{PA}}$: ci sono enunciati veri in $\mathbb{N}$ non dimostrabili in PA. La consistenza di PA è il caso esplicito.

Teorema A.1 (Löwenheim-Skolem come Teorema Analogico). Due sistemi relazionali elementarmente equivalenti (soddisfano gli stessi enunciati del primo ordine) hanno $d_A = 0$ sse uno è un'estensione elementare dell'altro, o entrambi sono modelli della stessa teoria completa.

Appendice B: Relazione con la Teoria dei Grafi

Teorema B.1 (Distanza di Edit come Distanza Analogica). Per due grafi G e H con $n_G \leq n_H$ vertici,

$$d_A(G, H) \leq d_{\text{edit}}(G, H) / n_H^2.$$

Dimostrazione. Una sequenza di operazioni elementari di edit definisce una sequenza di morfismi da G a H , ciascuno dei quali modifica al più un arco. La distanza strutturale per passo è $\leq 1/n_H^2$, e la sub-additività dà la disuguaglianza. $\square$

Teorema B.2 (Calcolo Efficiente per Grafi Regolari). Per grafi d -regolari G e H ,

$$d_A(G, H) \leq C \cdot \|L_G/|E_G| - L_H/|E_H|\|_F$$

dove L_G è il Laplaciano di G e $\|\cdot\|_F$ è la norma di Frobenius.

Appendice C: Relazione con l'Apprendimento Statistico

Definizione C.1. Un classificatore binario è un morfismo $(f, \alpha) : S \rightarrow T$ con $S = (X, \{R\}, \{R \mapsto 2\})$ e $T = (\{0, 1\}, \{\leq\}, \{\leq \mapsto 2\})$. La fedeltà globale è l'accuratezza del classificatore.

Teorema C.1 (No-Free-Lunch per Analogie). Per ogni algoritmo di apprendimento A (che sceglie un morfismo dato un insieme di esempi), esistono una distribuzione sui dati rispetto alla quale A è ottimale, e un'altra rispetto alla quale A non è migliore del caso.

Dimostrazione. Il teorema di No-Free-Lunch di Wolpert e Macready (1997) riinterpretato nel linguaggio dei morfismi di struttura: nessun morfismo di struttura può avere alta fedeltà rispetto a tutte le relazioni per qualsiasi sistema S , perché questo richiederebbe che la funzione f sia contemporaneamente ottimale per distribuite di dati antitetiche. $\square$

Teorema C.2 (VC Dimension come Complessità Analogica). Per un classificatore binario definito da $(f, \alpha) : S \rightarrow T$, la VC dimension dell'insieme di ipotesi è il numero massimo di semplici di $\Delta(S)$ che possono essere "shattered" da (f, α) : un sottoinsieme di p semplici può essere shattered sse ogni delle 2^p classificazioni possibili è realizzabile da qualche morfismo della stessa classe.

Nota Conclusiva sui Metodi e le Prospettive

La teoria costruita in questo saggio integra strumenti da aree matematiche che comunicano troppo raramente tra loro: logica matematica, geometria riemanniana, teoria dell'informazione, topologia algebrica, teoria delle categorie, fisica matematica, teoria dei giochi. I risultati genuinamente nuovi — il Teorema della Proiezione Analogica e la sua ottimalità, la Formula della Curvatura, il Teorema di Gauss-Bonnet Analogico con la sua dimostrazione completa, il Teorema di de Rham Analogico, la Formula di Künneth Analogica — appartengono a questa teoria.

La direzione più promettente per sviluppi futuri è la connessione con le ∞ -categorie di Lurie: la nostra teoria dei sistemi relazionali è una versione metrica e quantitativa della teoria delle ∞ -categorie, che è invece puramente qualitativa e strutturale. Integrare le due prospettive — misurare le ∞ -categorie con la metrica analogica, interpretare la teoria delle analogie nel linguaggio delle ∞ -categorie — è un programma di ricerca aperto.

Un'altra direzione riguarda le misure sugli spazi di moduli: la metrica d_A definisce una struttura di spazio metrico sullo spazio di tutti i sistemi relazionali di una data segnatura, e lo studio delle misure su questo spazio (parallelo alle misure di Witten sugli spazi di moduli o alle misure di Fisher-Rao in statistica) potrebbe permettere di "pesare" le analogie e identificare quelle più generiche in un senso statistico preciso.

Bibliografia

- Atiyah, M.F. (1961). Vector bundles and the Künneth formula. *Topology*, 1, 245–248.
- Atiyah, M.F. e Hirzebruch, F. (1959). Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds. *Bulletin of the AMS*, 65(4), 276–281.
- Awodey, S. (2010). *Category Theory*. Second Edition. Oxford University Press.
- Ben-Zvi, D. e Nadler, D. (2009). The character theory of a complex group. arXiv:0904.1247.
- Birkhoff, G.D. (1931). Proof of the ergodic theorem. *PNAS*, 17(12), 656–660.
- Buscher, T.H. (1987). A symmetry of the string background field equations. *Physics Letters B*, 194(1), 59–62.
- Coquand, T. e Huet, G. (1988). The calculus of constructions. *Information and Computation*, 76(2–3), 95–120.
- Cover, T.M. e Thomas, J.A. (1991). *Elements of Information Theory*. Wiley.
- Curry, H.B. (1934). Functionality in combinatory logic. *PNAS*, 20(11), 584–590.
- Deligne, P. (1974). La conjecture de Weil. I. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 43, 273–307.

- Deligne, P. e Mumford, D. (1969). The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 36, 75–109.
- Diamond, F. e Shurman, J. (2005). *A First Course in Modular Forms*. Springer.
- Drinfeld, V.G. (1983). Two-dimensional ℓ -adic representations. *American Journal of Mathematics*, 105, 85–114.
- Eilenberg, S. e Mac Lane, S. (1945). General theory of natural equivalences. *Trans. AMS*, 58, 231–294.
- Forman, R. (1998). Morse theory for cell complexes. *Advances in Mathematics*, 134(1), 90–145.
- Frenkel, E. (2007). *Langlands Correspondence for Loop Groups*. Cambridge University Press.
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping. *Cognitive Science*, 7(2), 155–170.
- Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, 173–198.
- Goodman, N. (1972). *Problems and Projects*. Bobbs-Merrill.
- Gromov, M. (1981). *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. Cedic/Nathan.
- Grothendieck, A. (1957). Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Mathematical Journal*, 9, 119–221.
- Grothendieck, A. (1960). *Éléments de géométrie algébrique*. Publications Mathématiques de l'IHÉS.
- Harris, M. e Taylor, R. (2001). *The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties*. Princeton University Press.
- Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.
- Henniart, G. (2000). Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$. *Inventiones Mathematicae*, 139(2), 439–455.
- Hodge, W.V.D. (1941). *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*. Cambridge University Press.
- Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics. (2013). The Univalent Foundations Program, IAS Princeton.
- Howard, W.A. (1980). The formulae-as-types notion of construction. In J. Hindley e J. Seldin (eds.), *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic*. Academic Press. (Manoscritto del 1969.)

- Joyal, A. (1997). Disks, duality and theta-categories. Preprint, Université du Québec à Montréal.
- Kapustin, A. e Witten, E. (2006). Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program. *Communications in Number Theory and Physics*, 1(1), 1–236.
- Kolmogorov, A.N. (1965). Three approaches to the quantitative definition of information. *Problems of Information and Transmission*, 1(1), 1–7.
- Lafforgue, L. (2002). Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands. *Inventiones Mathematicae*, 147(1), 1–241.
- Lambek, J. (1968). Deductive systems and categories. *Mathematical Systems Theory*, 2(4), 287–318.
- Langlands, R.P. (1967). Letter to André Weil. Yale University.
- Lawvere, F.W. (1969). Adjointness in foundations. *Dialectica*, 23(3–4), 281–296.
- Li, M. e Vitányi, P. (1997). *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*. Springer.
- Lurie, J. (2009). *Higher Topos Theory*. Princeton University Press.
- Lurie, J. (2017). *Higher Algebra*. Disponibile su math.harvard.edu.
- Mac Lane, S. (1971). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.
- Maldacena, J. (1998). The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4), 1113–1133.
- Martin-Löf, P. (1975). An intuitionistic theory of types: Predicative part. In *Logic Colloquium '73*. North-Holland.
- Maxwell, J.C. (1865). A dynamical theory of the electromagnetic field. *Phil. Trans. Royal Society*, 155, 459–512.
- Montonen, C. e Olive, D. (1977). Magnetic monopoles as gauge particles? *Physics Letters B*, 72(1), 117–120.
- Morley, M. (1965). Categoricity in power. *Trans. AMS*, 114(2), 514–538.
- Nash, J.F. (1950). Equilibrium points in n-person games. *PNAS*, 36(1), 48–49.
- Quillen, D. (1973). Higher algebraic K-theory: I. In H. Bass (ed.), *Algebraic K-Theory*. Springer.
- Robertson, H.P. (1929). The uncertainty principle. *Physical Review*, 34(1), 163–164.
- Serre, J.-P. (1955). Faisceaux algébriques cohérents. *Annals of Mathematics*, 61(2), 197–278.

- Swan, R.G. (1962). Vector bundles and projective modules. *Trans. AMS*, 105(2), 264–277.
- Talagrand, M. (1995). Concentration of measure. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 81, 73–205.
- Taylor, R. e Wiles, A. (1995). Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. *Annals of Mathematics*, 141(3), 553–572.
- Voevodsky, V. (2014). An experimental library of formalized mathematics. *Mathematical Structures in Computer Science*, 25(5), 1278–1294.
- Wigner, E.P. (1932). On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physical Review*, 40(5), 749–759.
- Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*, 141(3), 443–551.
- Witten, E. (1998). Anti-de Sitter space and holography. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2(2), 253–291.
- Wolpert, D.H. e Macready, W.G. (1997). No free lunch theorems for optimization. *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, 1(1), 67–82.
- Yoneda, N. (1954). On the homology theory of modules. *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo*, 7, 193–227.
- Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen*, 65(2), 261–281.